Chapter II

RELATIVIDAD ESPECIAL

Hay limitaciones al movimiento que no aparecen en la descripción galileana. La primera limitación que encontramos es la existencia de una velocidad máxima en la naturaleza. Esta velocidad máxima implica muchos resultados fascinantes: los intervalos de espacio y tiempo dependen del observador, hay una relación íntima entre masa y energía, y existen los horizontes de eventos. Exploraremos estos puntos ahora.

3. VELOCIDAD MÁXIMA, OBSERVADORES EN REPOSO, Y MOVIMIENTO DE LA LUZ

“Fama nihil est celerius.* ”

La luz es indispensable para una descripción precisa del movimiento. Para comprobar si una línea o una trayectoria de movimiento es recta debemos mirar a lo largo de ella. En otras palabras, utilizamos la luz para definir la rectitud. ¿Cómo sabemos si una superficie es plana? Mirando a lo largo y ancho de ella,**de nuevo utilizando la luz. ¿Cómo medimos longitudes con gran precisión? Con luz. ¿Cómo medimos el tiempo con gran precisión? Con luz: antiguamente se usaba la luz del Sol; actualmente, la luz de ciertos átomos de cesio. Página 1170

En otras palabras, la luz es importante porque es el modelo de *movimiento no perturbado*. La física habría evolucionado mucho más aprisa si, en algún punto del pasado, se hubiese reconocido que la propagación de la luz es el ejemplo ideal de movimiento.

Pero ¿es realmente la luz una manifestación de movimiento? Ya en la antigua Grecia se sabía que es así, gracias a un fenómeno cotidiano, la *sombra*. Las sombras prueban que la luz es una entidad que se mueve, que surge de una fuente de luz, y que sigue líneas rectas.***La conclusión obvia de que la luz requiere cierta cantidad de tiempo para

* ‘Nada es más rápido que el rumor.’ Se trata de una versión simplificada del aforismo de Virgilio:: *fama, malum qua non aliud velocius ullum*. ‘El rumor, el diablo más rápido de todos.’ De el libro de la *Eneida*, libro IV, versos 173 y 174.

** Obsérvese que mirar a lo largo de la superficie desde todos los lados no es suficiente, ya que una superficie que toque un rayo de luz a lo largo de toda su longitud en *todas* las direcciones no tiene por qué ser necesariamente plana. ¿Podrías dar un ejemplo? Se necesitan otros métodos para comprobar que es plana utilizando luz. ¿Podrías especificar uno? Desafío 331 s

*** Siempre que una fuente produce sombras, las entidades emitidas se llaman *rayos* o *radiación*. Además de la luz, otros ejemplos de radiación descubiertos gracias a las sombras que producen son los *rayos infrarrojos* y los *rayos ultravioletas* que emanan de la mayor parte de las fuentes de luz junto con la luz visible, y los

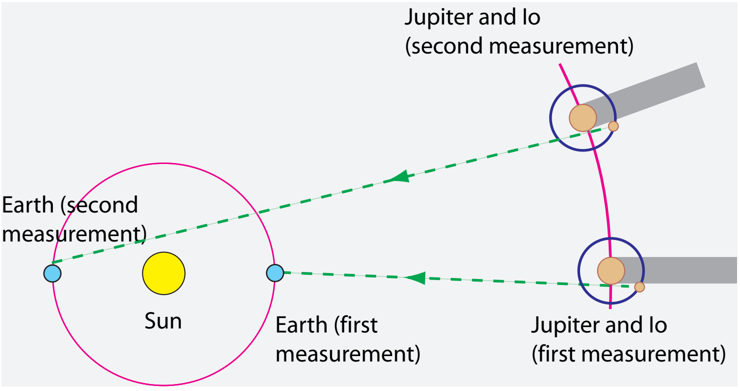

FIGURE 86 Método de Römer para medir la velocidad de la luz

viajar desde la fuente hasta la superficie que muestra la sombra ya fue adelantada por el pensador griego Empedocles (*c.* 490 to *c.* 430 BCE). Ref. 139

Podemos confirmar este resultado con otro argumento, igual de sencillo pero más sutil. La velocidad puede medirse. Por tanto, la *velocidad perfecta*, que se utiliza implícitamente como patrón de medida, debe tener un valor finito. Un patrón de velocidad que fuese infinito no permitiría realizar medidas en absoluto. En la naturaleza, las partículas más ligeras se mueven a velocidades mayores. Como la luz es 'ligera',* es una candidata perfecta para representar el movimiento perfecto pero con velocidad finita. Confirmaremos esto dentro de un minuto. Desafío 332 s

Una velocidad de la luz finita significa que todo lo que vemos proviene del *pasado*. Cuando miramos a una estrella, al Sol o a nuestra pareja, siempre vemos una imagen de su pasado. En cierto sentido, la naturaleza nos impide disfrutar el presente – debemos por tanto aprender a disfrutar el pasado.

La velocidad de la luz es grande; por tanto no se midió hasta 1676, aunque muchos, entre ellos Galileo, habían intentado hacerlo anteriormente. El primer método de medida fue desarrollado por el astrónomo danés Ole Römer** cuando estaba estudiando las

rayos catódicos, que se descubrió que correspondían al movimiento de una nueva partícula, el *electrón*. Las sombras también han llevado al descubrimiento de los *rayos X*, que de nuevo resultan ser un tipo de luz, en esta ocasión de alta frecuencia. También los *rayos de canal* fueron descubiertos por sus sombras; resultaron ser átomos ionizados viajando. Los tres tipos de radioactividad, *rayos* α (núcleos de helio), *rayos* β (otra vez electrones), y *rayos* γ (rayos X de alta energía) también producen sombras. Todos estos descubrimientos se hicieron entre 1890 y 1910: estos fueron los 'días de rayos' de la Física.

* N.T.: En el original: 'light is indeed light', juego de palabras sin traducción en castellano que surge del doble significado de la palabra 'light': luz y ligero. Obsérvese sin embargo que, gracias principalmente a la publicidad, la mayoría de los hispanohablantes asocian la palabra 'light' con el significado de ligero o 'bajo en calorías'.

** Ole (Olaf) Römer (1644 Aarhus – 1710 Copenhagen), astrónomo danés. Fue el tutor del Delfín en París en la época de Luis XIV. La idea de medir la velocidad de la luz de esta forma se debe al astrónomo italiano Giovanni Cassini, de quien Römer fue ayudante. Römer continuó sus mediciones hasta 1681, cuando tuvo que dejar Francia como todos los protestantes (como por ejemplo Christiaan Huygens), dejando su trabajo interrumpido. Al volver a Dinamarca, un incendio destruyó todas sus notas. Como consecuencia, no fue capaz de mejorar la precisión de su método. Más tarde se convirtió en un importante administrador y reformador del estado danés.

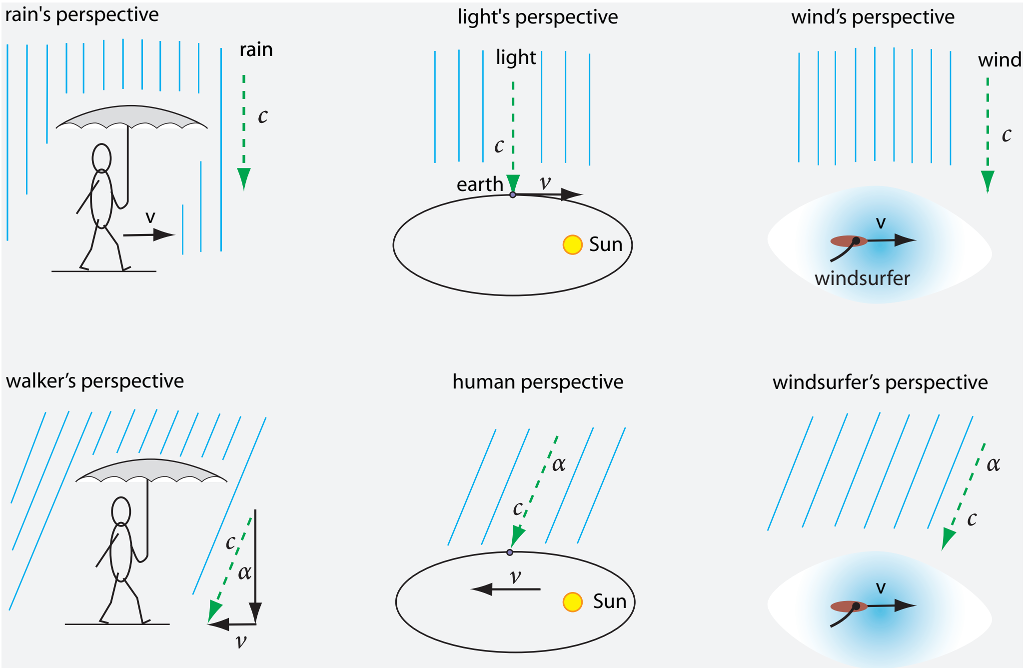

FIGURE 87 Método de la lluvia para medir la velocidad de la luz

Página ?? órbitas de Io y los demás satélites galileanos de Júpiter. Obtuvo un valor incorrecto de la velocidad de la luz porque utilizó un valor erróneo para la distancia entre la Tierra y Júpiter. Sin embargo, esto fue rápidamente corregido por sus contemporáneos, incluyendo Desafío 333 s al propio Newton. Puedes intentar deducir su método de la Figura 86. Desde entonces se sabe que la luz tarda un poco más de 8 minutos en viajar desde el Sol a la Tierra. Esto lo confirmó de una forma elegante el astrónomo James Bradley, cincuenta años más Página 111 tarde, en 1726. Como era inglés, Bradley pensó en el 'método de la lluvia' para medir la Ref. 140 velocidad de la luz.

¿Cómo podemos medir la velocidad de caída de la lluvia? Andamos rápidamente con un paraguas, medimos el ángulo α al que parece caer la lluvia, y entonces medimos nuestra propia velocidad. Como se muestra en la Figura 87, la velocidad c de la lluvia viene dada por

$$c = v/\tan\alpha\ . \tag{57}$$

El mismo procedimiento puede seguirse para la luz; tan sólo necesitamos medir el ángulo al que llega a la Tierra la luz proveniente de una estrella situada justamente sobre su órbita. Como la Tierra se está moviendo respecto del Sol y, por tanto, respecto de la estrella de referencia, el ángulo no será recto. Este efecto se denomina *aberración* de la luz; el ángulo se encuentra más fácilmente comparando medidas separadas seis meses. El valor de este ángulo es 20,5″; actualmente puede medirse con una precisión de cinco decimales. Dado que la velocidad de la Tierra alrededor del Sol es $v = 2\pi R/T = 29{,}7\,\mathrm{km/s}$, la velocidad de la luz será pues $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.* Este es un valor sobrecogedor, especialmente cuando

* Los paraguas no eran comunes en la Gran Bretaña de 1726; se pusieron de moda más tarde, cuando llegaron

lo comparamos con la mayor velocidad alcanzada por objetos hechos por el hombre, los satélites Voyager, que viajan a 52 Mm/h = 14 km/s, con la velocidad de crecimiento de un niño, unos 3 nm/s, o con la velocidad de crecimiento de las estalagmitas en la cavernas, unos 0,3 pm/s. Empezamos a comprender por qué medir la velocidad de la luz es una ciencia con derecho propio.

La primera medida *precisa* de la velocidad de la luz la llevó a cabo el físico francés Hippolyte Fizeau (1819–1896) en 1849. Su valor es sólo un 5 % mayor que el moderno. Envió un haz de luz hacia un espejo distante y midió el tiempo que tardaba la luz en volver. ¿Cómo pudo Fizeau medir ese tiempo sin utilizar ningún instrumento eléctrico? De Página 62 hecho, usó las mismas ideas que se utilizan para medir velocidades de balas; parte de la Desafío 338 s respuesta se desvela en la Figura 88. (¿Cómo de alejado debe estar el espejo?) Una reconstrucción moderna de este experimento, realizada por Jan Frercks, alcanzó una precisión Ref. 143 del 2 %. Hoy, el experimento es mucho más sencillo; en el capítulo sobre electrodinámica descubriremos cómo medir la velocidad de la luz utilizando dos ordenadores UNIX o Página ?? Linux conectados por un cable.

La velocidad de la luz es tan grande que es difícil incluso demostrar que es *finita*. Tal vez el modo más elegante de probarlo es fotografiar un pulso de luz cruzando el campo de visión, del mismo modo que uno puede fotografiar la conducción de un coche o el vuelo Ref. 144 de una bala por el aire. La Figura 89 muestra la primera fotografía de ese tipo, tomada en 1971 con una cámara reflex normal, un obturador muy rápido inventado por los fotógrafos y, lo más notable, sin usar equipo electrónico. (¿Cómo de rápido tiene que ser el

---

desde China. La parte referida a paraguas de esta historia es una invención. En realidad, Bradley tuvo su idea mientras navegaba por el Támesis, cuando notó que desde un barco en movimiento el viento podía tener un sentido distinto que desde la orilla. Durante muchos años había estado siguiendo 50 estrellas, especialmente Gamma Draconis, y durante todo ese tiempo se había intrigado por el *signo* de la aberración, que tenía el efecto *opuesto* al que buscaba, que era el paralaje estelar. Tanto el paralaje como la aberración provocan que una estrella situada sobre la elíptica describa una pequeña elipse a lo largo de un año terrestre, si bien con Desafío 334 s sentidos de rotación opuestos. ¿Puedes ver a qué es debido?

Por cierto, una consecuencia de la relatividad especial es que la fórmula (57) está equivocada, y que la Desafío 335 s fórmula correcta es $c = v/\sin\alpha$; ¿puedes ver por qué es así?

Para determinar la velocidad de la Tierra, primero tenemos que conocer la distancia que nos separa del Sol. El método más sencillo se lo debemos al pensador griego Aristarcos de Samos (*c.* 310 to *c.* 230 BCE). Medimos el ángulo entre la Luna y el Sol en el momento en el que la Luna está precisamente en cuarto creciente. El coseno de ese ángulo nos da el cociente entre la distancia a la Luna (determinada, por ejemplo, por el método descrito en la página 130) y la distancia al Sol. La explicación se deja como ejercicio para el Desafío 336 s lector.

El ángulo en cuestión es prácticamente un ángulo recto (que correspondería a una distancia infinita), y Ref. 141 se necesitan buenos instrumentos para medirlo con precisión, tal y como Hiparcos refirió en una extensa discusión sobre el problema alrededor del año 130 BCE. Hasta finales del siglo diecisiete no fue posible medir este ángulo con precisión, cuando se encontró que vale 89,86°, lo que da un cociente entre distancias de 400, Página 1183 más o menos. Hoy en día, gracias a las mediciones con radar de los planetas, la distancia al Sol se conoce con la asombrosa precisión de 30 metros. Las variaciones de la distancia a la Luna se pueden medir al centímetro; Desafío 337 s ¿podrías adivinar cómo se consigue esto?

Ref. 142 Aristarcos también determinó los radios del Sol y de la Luna como múltiplos del radio de la Tierra. Aristarcos fue un pensador impresionante: fue el primero en proponer el sistema heliocéntrico, y tal vez el primero en proponer que las estrellas eran soles lejanos. Por estas ideas, algunos de sus contemporáneos propusieron que fuese condenado a muerte por herejía. Cuando el monje y astrónomo polaco Nicolaus Copernicus (1473–1543) retomó el modelo heliocéntrico dos mil años más tarde, no mencionó a Aristarcos, a pesar de que tomó la idea de él.

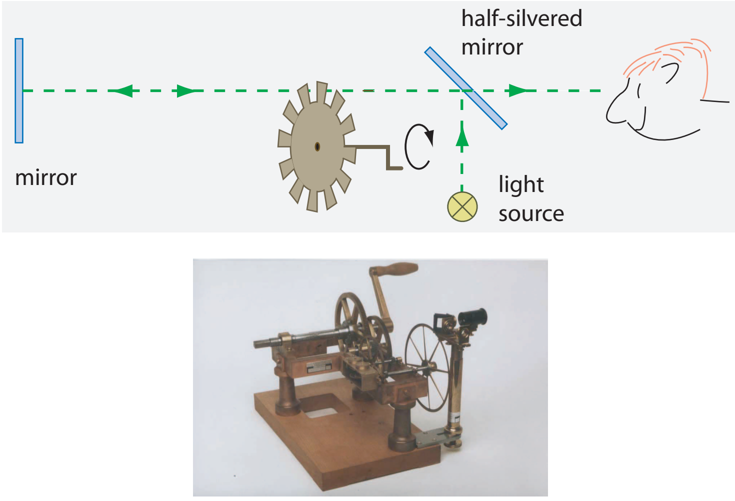

FIGURE 88 Montaje experimental de Fizeau para medir la velocidad de la luz (© AG Didaktik und Geschichte der Physik, Universität Oldenburg)

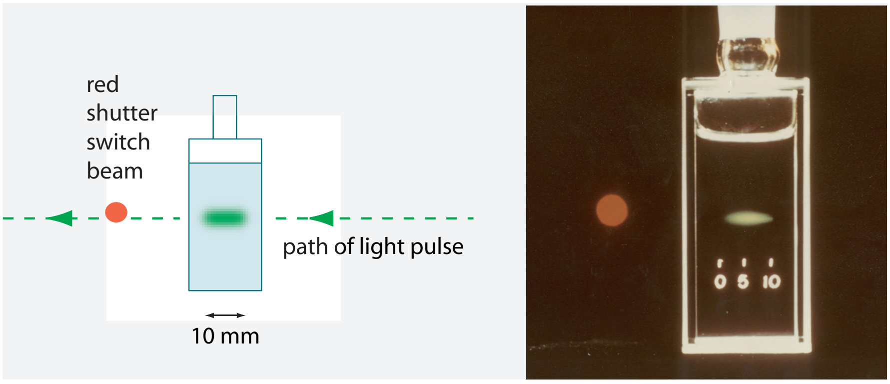

FIGURE 89 Una fotografía de un pulso de luz moviéndose de derecha a izquierda a través de una botella llena de un líquido lechoso, marcada en milímetros (fotografía © Tom Mattick)

Desafío 339 s obturador? ¿Cómo construirías un obturador así? ¿Y cómo te asegurarías de que se abre en el instante oportuno?)

Que la velocidad de la luz sea finita implica que los haces de luz que giran rápidamente se comportan como se muestra en la Figura 90. En la vida cotidiana, la velocidad de la luz es tan grande y la velocidad de rotación de los faros tan pequeña, que este efecto apenas es apreciable.

En resumen, la luz se mueve extremadamente rápida. Es mucho más rápida que un relámpago, como puedes comprobar por ti mismo. Un siglo de medidas cada vez más precisas de la velocidad de la luz nos ha llevado a su valor moderno
Desafío 340 s

$$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m/s}. \tag{58}$$

De hecho, este valor ha sido fijado *de forma exacta*, por definición, y el metro se ha definido a partir de c. La Tabla 23 muestra un resumen de lo que se conoce hoy sobre el

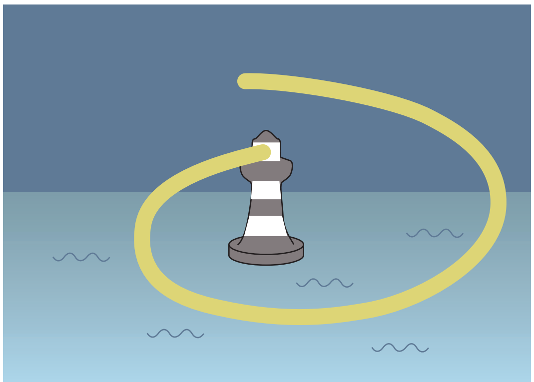

FIGURE 90 Una consecuencia de que la velocidad de la luz sea finita

TABLE 23 Propiedades del movimiento de la luz

Observaciones acerca de la luz
La luz puede propagarse por el vacío.
La luz transporta energía.
La luz tiene momento lineal: puede golpear otros cuerpos.
La luz tiene momento angular: puede rotar otros cuerpos.
La luz se mueve cruzando otra luz sin perturbarse.
La luz siempre se mueve más rápido en el vacío de lo que lo hace cualquier cuerpo material.
La velocidad de la luz, su auténtica velocidad de señal, es la velocidad del frente de onda. Página 593
Su valor en el vacío es 299 792 458 m/s.
La velocidad propia de la luz es infinita. Página 215
Las sombras pueden moverse sin límite de velocidad.
La luz se mueve en línea recta cuando está alejada de la materia.
La luz de alta intensidad es una onda.
Cuando la longitud de onda es despreciable, la luz se aproxima por rayos.
En la materia, tanto la velocidad de frente como la velocidad de transmisión de energía son menores que en el vacío.
En la materia, la velocidad de grupo de los pulsos de luz puede ser nula, positiva, negativa o infinita.

movimiento de la luz. Dos propiedades sorprendentes, que forman las bases de la relatividad especial, fueron descubiertas al final del siglo diecinueve. Ref. 145

¿Se puede jugar al tenis utilizando un pulso láser como pelota y dos espejos como raquetas?

> “Et nihil est celerius annis.*
> Ovidio, *Metamorfosis*.”

* ‘Nada es más rápido que el paso de los años.’ libro X, verso 520.

FIGURE 91 Albert Einstein

Todos sabemos que para lanzar una piedra lo más lejos posible debemos correr al mismo tiempo que la lanzamos; sabemos instintivamente que así la velocidad de la piedra respecto al suelo será mayor. Sin embargo, para sorpresa inicial de todo el mundo, los experimentos muestran que la luz emitida por una lámpara en movimiento tiene la misma velocidad que la luz emitida por un lámpara en reposo. La luz (en el vacío) nunca es más rápida que la luz; todos los haces de luz tienen la misma velocidad. Este resultado se ha confirmado con gran precisión por muchos experimentos especialmente diseñados Ref. 146 para ello. La velocidad de la luz se puede medir con una precisión mayor que 1 m/s; pero no se ha encontrado ninguna diferencia incluso para lámparas que se mueven a más de Desafío 341 s 290 000 000 m/s. (¿Sabrías decir qué lámparas se han usado?)

En la vida cotidiana, sabemos que una piedras llega antes si corremos hacia ella, De nuevo, para la luz, no se encuentra diferencia. Todos los experimentos muestran que la velocidad de la luz es *la misma* para todos los observadores, incluso aunque se estén moviendo unos respecto a otros o respecto a la fuente de luz. La velocidad de la luz es realmente el patrón de medida perfecto.*

Ref. 149 Hay también un segundo conjunto de evidencias experimentales para la constancia de la velocidad de la luz. Todos los dispositivos electromagnéticos, tales como un cepillo Página 544 de dientes eléctrico, muestran que la velocidad de la luz es constante. Descubriremos que los campos magnéticos no se formarían a partir de corrientes eléctricas, como lo hacen en cada motor y en cada altavoz del mundo, si la velocidad de la luz no fuese constante. Así fue, de hecho, como varios científicos dedujeron por primera vez la constancia de la velocidad de la luz. Sólo tras comprender esto, pudo el físico germano-suizo Albert

* Términos equivalentes al de velocidad de la luz son 'velocidad de radar' y 'velocidad de radio'; veremos Página 574 más adelante porqué es así.

La velocidad de la luz también es parecida a la velocidad de los neutrinos. Esto se vio de forma espectacular durante la observación de una supernova en 1987, cuando el flash de luz y el pulso de neutrinos alcanzaron la Tierra separados por tan sólo 12 segundos. (No se sabe si esta diferencia se debe a que los dos flashes tienen velocidades diferentes o a que se iniciaron en puntos distintos.) ¿Cuál es el primer dígito en Desafío 342 s el que podrían diferir las dos velocidades, sabiendo que la supernova estaba a $1{,}7 \cdot 10^5$ años-luz de distancia?

Los experimentos también muestran que la velocidad de la luz es la misma en todas las direcciones espa- Ref. 147 ciales, al menos con una precisión de 21 cifras. Otros datos, obtenidos a partir de estallidos de rayos gamma, muestran que la velocidad de la luz es independiente de la frecuencia, al menos con una precisión de 20 Ref. 148 cifras.

Einstein* mostrar que dicha constancia también está en acuerdo con el movimiento de los cuerpos, como veremos en esta sección. La conexión entre cepillos eléctricos y relatividad será descrita en el capítulo sobre electrodinámica. Página 544 (Para información sobre la influencia directa de la relatividad en el diseño de máquinas, consultar el interesante texto de Van Bladel.) Ref. 151 En términos sencillos: si la velocidad de la luz no fuese constante, los observadores podrían moverse a la velocidad de la luz. Puesto que la luz es una onda, tales observadores verían una onda que se mantiene quieta. Pero éste es un fenómeno prohibido por el electromagnetismo, por tanto los observadores no pueden alcanzar la velocidad de la luz.

En resumen, la velocidad v de cualquier sistema físico (es decir, cualquier masa o energía localizada) está acotada por

$$v \leqslant c \, . \tag{59}$$

Esta relación es la base de la relatividad especial; de hecho, toda la teoría de la relatividad especial está contenida en ella. Einstein a menudo lamentaba que su teoría se llamase 'Relativitätstheorie' o 'teoría de la relatividad'; él prefería el nombre 'Invarianztheorie' o 'teoría de la invarianza', pero nunca consiguió cambiar el nombre. Ref. 152

La constancia de la velocidad de la luz contrasta completamente con la mecánica galileana, y prueba que ésta es *incorrecta* a grandes velocidades. A bajas velocidades la descripción es buena porque el error es pequeño. Pero si queremos una descripción válida para *todas* las velocidades, tendremos que descartar la mecánica de Galileo. Por ejemplo, cuando jugamos al tenis usamos el hecho de que golpeando la pelota de la manera correcta, podemos incrementar o decrementar su velocidad. Pero con la luz no es posible. Incluso si nos subimos en un avión y volamos hacia el haz de luz, éste seguirá moviéndose a la misma velocidad. La luz no se comporta como los coches. Si conducimos un autobús y pisamos el acelerador, los coches del otro sentido de la carretera se cruzan con nosotros a mayor velocidad. Con la luz *no* ocurre esto: la luz siempre nos encuentra a la *misma* velocidad.**

---

* Albert Einstein (b. 1879 Ulm, d. 1955 Princeton); uno de los mayores físicos de la historia. Publicó tres importantes artículos en 1905, uno sobre movimiento browniano, uno sobre relatividad especial, y el otro sobre la idea de cuantos de luz. Cada artículo por sí sólo merecía un Premio Nobel, aunque sólo lo ganó por el tercero de ellos. También en 1905 demostró la famosa fórmula $E_0 = mc^2$ (que publicó a principios de 1906), Página 238 posiblemente siguiendo una idea de Olinto De Pretto. Aunque Einstein fue uno de los fundadores de la teoría cuántica, más tarde fue contrario a ella. En cualquier caso, sus famosas discusiones con su amigo Niels Bohr ayudaron a clarificar el campo en sus aspectos más contrarios a la intuición. Explicó el efecto Einstein–de Haas que prueba que el magnetismo se debe al movimiento dentro de los materiales. En 1915 y 1916, publicó su mayor éxito: la teoría de la relatividad general, uno de los trabajos más bellos y transcendentes de la ciencia.

Por ser judío y famoso, Einstein fue objeto de ataques y discriminación por parte del movimiento nacionalsocialista alemán; por ello, en 1933, emigró a EEUU. No sólo fue un gran físico, también un gran pensador; su colección de pensamientos sobre temas distintos de la física merece una lectura. Ref. 150

Aquel que pretenda emular a Einstein debería saber que publicó muchos artículos, y que muchos de ellos estaban equivocados; él mismo corregía los resultados en posteriores artículos, y así una y otra vez. Esto ocurría tan a menudo que el propio Einstein bromeaba sobre ello. Einstein definió a un genio como la persona capaz de cometer el mayor número posible de errores en el menor intervalo de tiempo posible.

Ref. 147 ** De hecho, no podemos distinguir ningún cambio en la velocidad de la luz con la velocidad del observador, incluso con la precisión actual de $2 \cdot 10^{-13}$.

¿Por qué este resultado es tan increíble, incluso cuando las medidas nos lo muestran sin ningún género de duda? Consideremos dos observadores, O y Ω (pronunciado 'ómega'), que se acercan con una velocidad relativa v, tal que y como lo harían dos coches en sentidos contrarios. Imaginemos que, en el momento en el que se cruzan, un flash de luz se emite desde una lámpara situada en O. El flash de luz se mueve por las posiciones $x(t)$ visto desde O, y por las posiciones $\xi(\tau)$ (pronunciado 'ji de tau') desde Ω. Puesto que la velocidad de la luz es la misma para ambos, tenemos

$$\frac{x}{t} = c = \frac{\xi}{\tau} \,. \tag{60}$$

Sin embargo, en la situación descrita, obviamente tenemos que $x \neq \xi$. En otras palabras, la constancia de la velocidad de la luz implica que $t \neq \tau$, es decir, que *el tiempo es distinto* Desafío 343 e *para observadores que se mueven uno respecto del otro*. El tiempo no es único. Este sor- Ref. 153 prendente resultado, que ha sido confirmado por muchos experimentos, fue establecido por primera vez de forma clara por Albert Einstein en 1905. Aunque otros muchos sabían que c era invariable, tan sólo el joven Einstein tuvo el coraje de decir que el tiempo depende del observador, y de asumir las consecuencias. Hagámoslo nosotros también.

Ya en 1895, la discusión acerca de la invarianza del punto de vista había sido llamada *teoría de la relatividad* por Henri Poincaré.* Einstein llamó teoría de la *relatividad* Ref. 149 *especial* a la descripción del movimiento sin gravedad, y teoría de la *relatividad general* a la descripción del movimiento con gravedad. Ambos campos están llenos de resultados fascinantes y contrarios a la intuición. En particular, muestran que la física galileana es incorrecta a velocidades altas.

La velocidad de la luz es un velocidad límite. Destacamos que no estamos hablando de la situación en la que una partícula se mueve con una velocidad mayor que la que tiene la luz *en la materia*, pero menor que la que tiene la luz *en el vacío*. Moverse en un material más rápido de lo que lo hace la luz es posible. Si la partícula está cargada, esta situación produce lo que se denomina *radiación de Čerenkov*. Es el equivalente a la onda con forma de V creada por una lancha motora en el mar, o a la onda de choque con forma de cono formada alrededor de un avión supersónico. La radiación de Čerenkov se observa de forma rutinaria; por ejemplo, es la causa del brillo azul del agua de los reactores nucleares. Dicho sea de paso, la velocidad de la luz en la materia puede ser bastante baja: en el centro del Sol, la velocidad de la luz se estima que vale alrededor de 10 km/año, e incluso en el Ref. 156, Ref. 157 laboratorio, para algunos materiales se ha encontrado que vale tan poco como 0,3 m/s. En lo que sigue, cuando usemos el término 'velocidad de la luz', se entenderá que nos referimos a la velocidad de la luz en el vacío. La velocidad de la luz en el aire es menor que en el vacío tan sólo en una pequeña fracción de tanto por ciento. En la mayoría de los casos esta diferencia podrá despreciarse.

* Henri Poincaré (1854–1912), importante físico y matemático francés. Poincaré fue uno de los hombres más productivos de su tiempo, contribuyendo a la relatividad, la teoría cuántica y muchas ramas de la matemática.

La introducción más bella y sencilla a la relatividad continúa siendo la del propio Albert Einstein, por ejemplo in *Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*, Vieweg, 1917, o en *The Meaning of Relativity*, Methuen, London, 1951. Ha tenido que pasar casi un siglo para que aparezcan libros casi tan bellos, como el Ref. 154, Ref. 155 texto de Taylor y Wheeler.

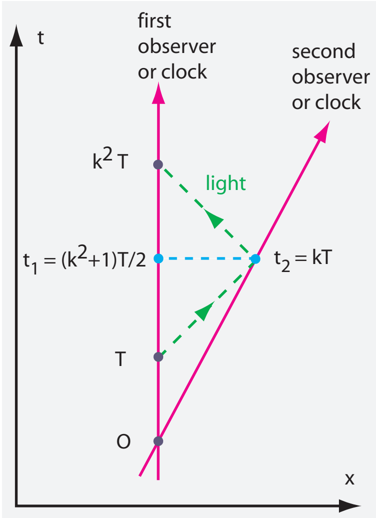

FIGURE 92 Un esquema que contiene casi toda la relatividad especial

Relatividad especial en unas pocas líneas

La velocidad de la luz es constante para todos los observadores. Podemos deducir todas las relaciones entre lo que miden dos observadores distintos con la ayuda de la Figura 92. Se muestran dos observadores en el espacio-tiempo, que se alejan entre sí con velocidad constante. El primero envía un flash de luz al segundo, que lo refleja de nuevo hacia el primero. Puesto que la velocidad de la luz es constante, el uso de luz es el único método con el que poder comparar coordenadas de espacio y tiempo de observadores distantes. Dos relojes separados (igual que dos reglas separas) tan sólo pueden compararse, o sincronizarse, utilizando pulsos de luz o de radio. Al ser la velocidad de la luz una constante, todas las trayectorias que sigue la luz en la misma dirección son rectas paralelas en los diagramas espacio-tiempo.

Ref. 158

La velocidad relativa constante entre los dos observadores implica que hay un factor constante k relacionando las coordenadas temporales de los eventos. (¿Por qué es lineal esta relación?) Si un pulso se emite en el instante T medido por el primer observador, llegará al segundo observador en el instante kT, y volverá de nuevo al primero en el instante k^2T. El dibujo muestra que

Desafío 344 s

Desafío 345 s

$$k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad \text{o} \quad \frac{v}{c} = \frac{k^2-1}{k^2+1} \,. \tag{61}$$

Este factor reaparecerá al estudiar el efecto Doppler.*

Página 201

La figura también muestra que la coordenada temporal t_1 asignada por el primer observador al momento en el que la luz se refleja es diferente de la coordenada t_2 asignada por el segundo observador. El tiempo es diferente para dos observadores en movimiento relativo. La Figura 93 ilustra este resultado.

* La explicación de la relatividad utilizando el factor k se conoce a menudo como *cálculo k*.

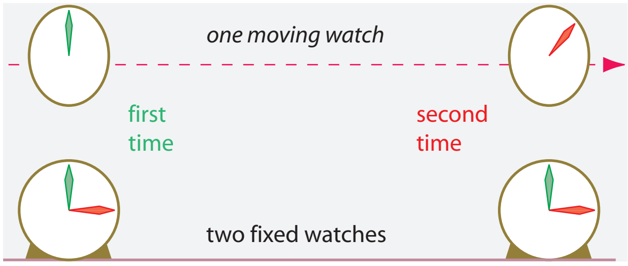

FIGURE 93 Los relojes en movimiento se atrasan

El *factor de dilatación temporal* entre las dos coordenadas temporales se obtiene de la Figura 92 comparando los valores de t_1 y t_2; viene dado por

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v) \; . \tag{62}$$

Los intervalos temporales de un observador en movimiento son *más cortos* en un factor γ; el factor de dilatación es siempre mayor que 1. En otras palabras, *los relojes en movimiento atrasan*. A las velocidades ordinarias este efecto es minúsculo. Sin embargo, la física galileana no es correcta a velocidades cercanas a la de la luz. El mismo factor γ también aparece en la fórmula $E = \gamma mc^2$, que deduciremos más adelante. La expresión (61), o la (62), es la única matemática necesaria en relatividad especial: todos los demás resultados se derivan de ella.

Desafío 346 e

Si el segundo observador envía un pulso de luz hacia el primero y éste se lo refleja, el segundo observador hará la misma afirmación que antes hacía el primero: para él, el primer reloj se está moviendo y, para él, es el primer reloj el que atrasa. *Cada uno de los observadores observa que el otro reloj atrasa*. La situación es similar a la de dos hombres comparando el número de escalones que tienen dos escaleras de mano idénticas, no paralelas. Un hombre siempre dirá que los escalones de *la otra* escalera son más cortos. Otra analogía: consideremos dos personas alejándose una de la otra. Cada una nota que la otra se hace menor conforme aumenta la distancia entre ellas.

Naturalmente, mucha gente ha tratado de encontrar argumentos que eviten la extraña conclusión de que el tiempo difiere de un observador a otro. Pero nadie ha tenido éxito, y los resultados experimentales confirman esta conclusión. Echemos un vistazo a algunos de ellos.

Aceleración de la luz y efecto Doppler

La luz *puede* acelerarse. ¡Todos los espejos lo hacen! Veremos en el capítulo sobre electromagnetismo que la materia también tiene el poder de *doblar* la luz y, por tanto, acelerarla. Sin embargo, veremos que todos estos métodos tan sólo cambian la *dirección* de propagación; ninguno tiene la posibilidad de cambiar la *celeridad* de la luz en el vacío. En pocas palabras, la luz es un ejemplo de movimiento que no puede deternerse. Hay sólo unos pocos ejemplos más. ¿Podrías dar alguno?

Página 580
Desafío 347 s

¿Qué pasaría si pudiésemos acelerar la luz a velocidades mayores? Para que esto fuese

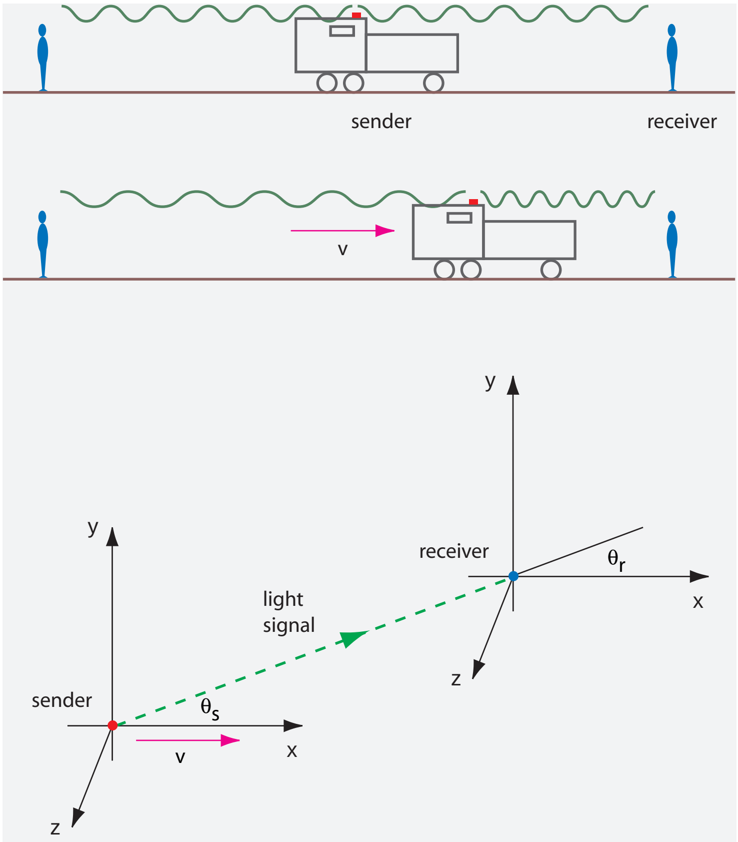

FIGURE 94 Montaje para la observación del efecto Doppler

posible, la luz tendría que estar hecha de partículas con una masa no nula. Los físicos llaman a esas partículas partículas *masivas*. Si la luz tuviese masa, sería necesario distinguir la 'velocidad de la energía sin masa' c de la velocidad de la luz c_L, que sería menor y dependería de la energía cinética de esas partículas masivas. La velocidad de la luz no sería constante, pero la velocidad de las partículas sin masa aún sí lo sería. Las partículas de luz masivas podrían ser capturas , detenidas y almacenadas en una caja. Esas cajas luminosas harían de la iluminación eléctrica algo innecesario; bastaría con almacenar en ellas algo de la luz del Sol durante el día y liberarla lentamente durante la noche – tal vez tras darle una cierta velocidad.*

Los físicos han estudiado la posibilidad de que la luz sea masiva con bastante detalle. Ref. 159, Ref. 160 Las observaciones actuales establecen que la masa de las partículas de luz es menor que $1{,}3 \cdot 10^{-52}$ kg, a partir de experimentos en la Tierra, y menor que $4 \cdot 10^{-62}$ kg, a partir de deducciones de astrofísica (que son algo menos lapidarias). En otras palabras, la luz no es pesada, la luz es ligera ('light is light').

Pero, ¿qué ocurre cuando la luz golpea un espejo *en movimiento*? Si la velocidad de la luz no cambia, alguna otra cosa deberá hacerlo. La situación es similar a la de una

* Por cierto, la luz masiva también tendría modos de polarización *longitudinales*. Esto contradice las observaciones, que muestran que la luz sólo está polarizada *transversalmente* a la dirección de propagación.

fuente de luz moviéndose con respecto al observador: éste observará un *color distinto* del que observará el emisor. Esto se conoce como *efecto Doppler*. Christian Doppler* fue el primero en estudiar el cambio en la frecuencia en el caso de ondas sonoras – el cambio, bien conocido, en el tono del silbato entre un tren que se acerca y uno que se aleja – y en extender el concepto al caso de ondas lumínicas. Como veremos más adelante, la luz es (también) una onda, y su color está determinado por su frecuencia o, equivalentemente, por su longitud de onda λ. Igual que el cambio de tono de los trenes en movimiento, Doppler se dio cuenta de que una fuente de luz en movimiento produce un color distinto en el que recibe la luz que en la fuente. Simplemente por geometría, y exigiendo que se
Desafío 348 e conserve el número de máximos y mínimos, llegamos al resultado

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_s} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta_r\right) = \gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta_r\right) . \qquad (63)$$

Las variables v y θ_r de esta expresión están definidas en la Figura 94. La luz proveniente de una fuente que se acerca será, por tanto, corrida al azul, mientras que la luz de una fuente que se aleja será corrida al rojo. La primera observación del efecto Doppler para la luz fue hecha por Johannes Stark**en 1905, cuando estudiaba la luz emitida por átomos en movimiento. Todas las medidas desde entonces han confirmado el cambio en color dentro del margen de error; las últimas pruebas han encontrado un acuerdo de dos par-
Ref. 161 tes por millón. Al contrario que con las ondas sonoras, el cambio de color también se encuentra cuando el movimiento es *transversal* a la señal lumínica. Así, una barra amarilla en rápido movimiento a lo largo de nuestro campo de visión tendrá su extremo de avance azul y su extremo de retroceso rojo, justo en el momento en el que se encuentre más cerca del observador. Los colores resultan de una combinación del desplazamiento Doppler longitudinal (de primer orden) y transversal (de segundo orden). A cierto ángulo $\theta_{\text{unshifted}}$ los colores serán los mismos. (¿Cómo cambia la longitud de onda in el caso
Desafío 349 s puramente transversal? ¿Cuál es expresión de $\theta_{\text{unshifted}}$ en función de v?)

El cambio de color se usa en muchas aplicaciones. Casi todos los cuerpos sólidos se comportan como espejos para las ondas de radio. Muchos edificios tienen puertas que se abren automáticamente cuando uno se aproxima. Un pequeño sensor situado sobre la puerta detecta una persona que se acerca. Normalmente lo hace midiendo el efecto Doppler sobre ondas de radio emitidas por el sensor y reflejadas por la persona. (Veremos
Página 574 más adelante que las ondas de radio y la luz son manifestaciones del mismo fenómeno.) Así, las puertas se abren cuando algo se acerca a ellas. Los radares de la policía también usan el efecto Doppler, en este caso para medir la velocidad de los coches.***

* Christian Andreas Doppler (b. 1803 Salzburgo, d. 1853 Venecia), físico austríaco. Doppler estudió el efecto que lleva su nombre tanto en la luz como en el sonido. En 1842 predijo (correctamente) que algún día seríamos capaces de usar este efecto para medir el movimiento de estrellas lejanas a partir de su color.

** Johannes Stark (1874–1957), descubrió en 1905 el efecto Doppler óptico en los rayos de canal y, en 1913, el desdoblamiento de las líneas espectrales en los campos eléctricos, hoy en día llamado efecto Stark. Por estas dos contribuciones recibió en 1919 el Premio Nobel de física. Dejo su cátedra en 1922 y se convirtió en un seguidor a ultranza del nacionalsocialismo. Como miembro del NSDAP desde 1930 en adelante, fue conocido por criticar agresivamente las afirmaciones de otras personas sobre la naturaleza simplemente por motivos ideológicos; tras lo que fue rechazado por la comunidad académica internacional.

Desafío 350 s *** Por cierto, ¿a qué velocidad se ve verde la luz de un semáforo en rojo?

El efecto Doppler también posibilita medir la velocidad de las fuentes de luz. De hecho, se usa comúnmente para medir la velocidad de estrellas distantes. En estos casos, el desplazamiento Doppler es a menudo caracterizado por el *corrimiento al rojo* z, definido con la ayuda de la longitud de onda λ o la frecuencia f como

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{f_{\mathrm{S}}}{f_{\mathrm{R}}} - 1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 \,. \tag{64}$$

Desafío 351 s ¿Te imaginas como se determina el número z? Los valores típicos de z para fuentes de luz en el cielo varían entre −0,1 y 3,5, pero se han encontrado valores mayores, de hasta 10 o más. ¿Podrías determinar las velocidades correspondientes a estos valores de corrimiento al rojo? ¿Cómo pueden ser tan altas? Desafío 352 s

En resumen, siempre que tratamos de cambiar la *velocidad* de la luz, tan sólo conseguimos cambiar su *color*. Eso es el efecto Doppler.

Página 146 Sabemos de la física clásica que cuando la luz pasa cerca de una masa grande, como una estrella, cambia su dirección de propagación. ¿Produce desplazamiento Doppler este cambio de dirección? Desafío 353 s

La diferencia entre luz y sonido

El efecto Doppler es mucho más importante para la luz que para el sonido. Incluso sin saber que la velocidad de la luz es una constante, este efecto por sí sólo *prueba* que el tiempo es distinto para observadores que se mueven unos respecto de otros. ¿Por qué? El tiempo es lo que medimos con un reloj. Para determinar si otro reloj está sincronizado con el nuestro, miramos a ambos relojes. En pocas palabras, necesitamos usar señales Ref. 162 lumínicas para sincronizar relojes. Ahora bien, cualquier cambio en el color de la luz que se mueve de un observador a otro necesariamente implica que sus relojes funcionan de manera diferente y que, por tanto, el tiempo mismo es *distinto* para cada uno de ellos dos. Una manera de ver esto es darse cuenta de que la propia luz es un reloj – con un 'tictac' muy rápido. Así que si dos observadores ven que la luz de una misma fuente tiene dos colores distintos, medirán un número distinto de oscilaciones del mismo reloj. En otras palabras, el tiempo es distinto para observadores que se mueven unos respecto de otros. De hecho, la ecuación (61) implica que toda la relatividad se deduce del efecto Doppler para la luz. (¿Puedes confirmar que la conexión entre frecuencias que dependen del observador y tiempos que dependen del observador no se da en el caso del efecto Doppler para el *sonido*?) Desafío 354 s

¿Por qué el comportamiento de la luz implica la relatividad especial, mientras que el del sonido en el aire no lo hace? La respuesta es que la luz es un límite para el movimiento de energía. La experiencia nos muestra que hay aviones supersónicos, pero no hay cohetes "superlumínicos". En otras palabras, el límite $v \leqslant c$ se cumple sólo si c es la velocidad de la luz, no si c es la velocidad del sonido en el aire.

Ahora bien, hay al menos un sistema en la naturaleza en el que la velocidad del sonido es realmente un límite para la velocidad de la energía: la velocidad del sonido es la velocidad límite del movimiento de *dislocaciones* en sólidos cristalinos. (Discutiremos Página 1009 esto en detalle más adelante.) Como consecuencia, la teoría de la relatividad especial también es válida para esas dislocaciones, ¡siempre y cuando la velocidad de la luz se sus-

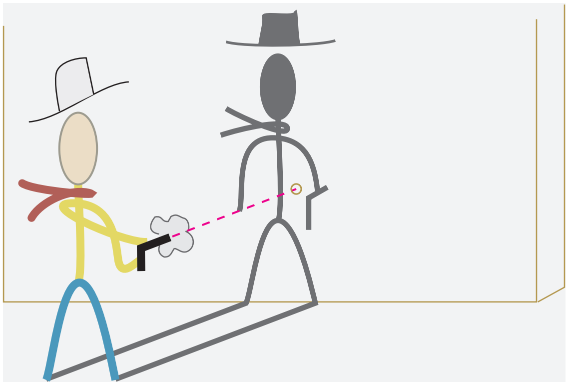

FIGURE 95 Lucky Luke

tituya en todas partes por la del sonido! Las dislocaciones cumplen las transformaciones de Lorentz, muestran contracciones de longitudes y obedecen la famosa fórmula para la energía $E = \gamma mc^2$. En todos estos efectos la velocidad del sonido c juega el mismo papel para las dislocaciones que la velocidad de la luz para los sistemas físicos generales. Ref. 163

Si la relatividad especial se basa en la afirmación de que nada puede moverse más rápido que la luz, esto tiene que comprobarse con mucho cuidado.

¿Puede disparar uno más rápido que su sombra?

> Quid celerius umbra?*

Para que Lucky Luke consiga hacer lo que se muestra en la Figura 95, su bala tiene que moverse más rápido que la luz. (¿Qué hay sobre la velocidad de su mano?) Para emular a Lucky Luke, podríamos coger la mayor cantidad posible de energía disponible, tomándola directamente de una estación generadora de electricidad, y acelerar las 'balas' más ligeras que podemos manejar: los electrones. Este experimento se lleva a cabo todos los días en aceleradores de partículas como el LEP, (Large Electron Positron ring). El LEP, con 27 km de circunferencia, se encuentra parte en Francia y parte en Suiza, cerca de Ginebra. Allí, 40 MW de potencia eléctrica (la misma cantidad que consume una ciudad pequeña) se consumen para acelerar electrones y positrones a energías por encima de 16 nJ (104,5 GeV) cada uno, y se miden sus velocidades. El resultado se muestra en la Figura 96: incluso con estos impresionantes medios no es posible hacer que los electrones se muevan más rápido que la luz. (¿Puedes imaginar un modo de medir la velocidad y la energía de forma independiente?) La relación velocidad–energía de la Figura 96 es una consecuencia de la velocidad máxima, y se deduce más adelante. Estas observaciones, y otras parecidas, nos muestran que hay un *límite* a la velocidad de los objetos. Los cuerpos (y la radiación) no se pueden mover a velocidad mayores que la de la luz.**La precisión

Desafío 355 e

Desafío 356 e

Página 233

* '¿Qué es más rápido que la sombra?' Un dicho que se encuentra a menudo en los relojes de sol.

** Aún hay gente que se niega a aceptar estos resultados, así como toda la teoría de la relatividad. Todo físico debería disfrutar la experiencia, al menos una vez en la vida, de conversar con uno de estos hombres. (Curiosamente, nadie ha visto a ninguna mujer entre esa gente.) Esto se puede hacer, por ejemplo, gracias a

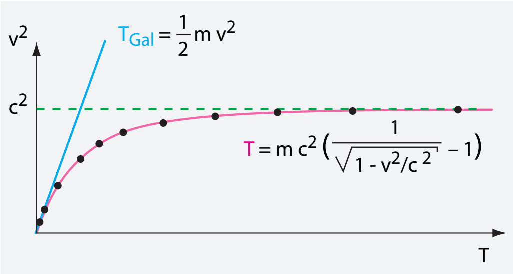

FIGURE 96 Valores experimentales (puntos) de la velocidad v de un electrón en función de su energía cinética T, comparados con la predicción de la física galileana (azul) y la de la relatividad especial (rojo).

de la mecánica galileana no se discutió durante más de tres siglos, así que nadie pensó en ponerla a prueba; pero cuando finalmente se hizo, como en la Figura 96, se encontró que era incorrecta.

Las personas más fastidiadas por este límite son los ingenieros de computadoras: si la velocidad límite fuese mayor, sería posible hacer microprocesadores más rápidos y, por tanto, ordenadores más rápidos; esto permitiría, por ejemplo, un avance en la construcción de ordenadores que entiendan y utilicen el lenguaje.

La existencia de una velocidad límite contradice la mecánica galileana. De hecho, eso significa que para velocidades cercanas a la de la luz, digamos unos 15 000 km/s o más, la expresión $mv^2/2$ *no* puede ser la velocidad cinética T de la partícula. De hecho, esas velocidades altas son bastante comunes: muchas familias tienen un ejemplo en sus casas. Simplemente calcula la velocidad de los electrones dentro de un aparato de televisión, sabiendo que el transformador de su interior produce 30 kV. Desafío 357 s

La observación de que la velocidad de la luz es una velocidad *límite* para los objetos se ve fácilmente que es una consecuencia de que sea *constante*. Los cuerpos que pueden estar en reposo en un marco de referencia obviamente se mueven más lentamente que la velocidad máxima (la de la luz) en ese marco de referencia. Ahora bien, si algo se mueve más despacio que otra cosa para *un* observador, también lo hará así para cualquier otro observador. (Intentar imaginar un mundo en el que esto no fuese así es interesante: cosas divertidas pasarían, tales como objetos que se interpenetran unos a otros.) Puesto que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores, ningún objeto se puede mover más rápido que la luz, para ningún observador. Desafío 358 d

Concluimos que la velocidad máxima es la velocidad de las entidades *sin masa*. Las ondas electromagnéticas, incluyendo la luz, son las únicas entidades conocidas que pueden viajar a la velocidad máxima. Se ha predicho que las ondas gravitacionales también alcanzan la velocidad máxima. A pesar de que la velocidad del neutrino no puede distinguirse experimentalmente de la velocidad máxima, algunos experimentos recientes sugieren que tienen masa, aunque minúscula. Ref. 166

Recíprocamente, si un existe un fenómeno cuya velocidad es la velocidad límite para un observador, entonces esa velocidad límite necesariamente debe ser la misma para todos los observadores. ¿La conexión entre propiedades límite e invariancia respecto al Desafío 359 e

Ref. 165 Internet, en el grupo de noticias de sci.physics.relativity Visite también http://www.crank.net . Estos chalados son una gente fascinante, especialmente porque insisten en la importancia de la *precisión* en el lenguaje y el razonamiento, que todos ellos, sin excepción, ignoran. Los encuentros con algunos de ellos me inspiraron para escribir este capítulo.

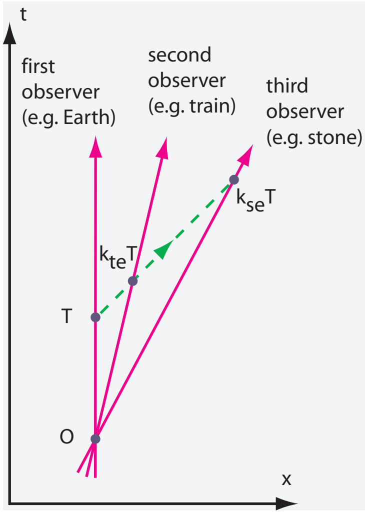

FIGURE 97 Cómo deducir la composición de velocidades.

Desafío 360 r observador es válida en general en la naturaleza?

Composición de velocidades

Si la velocidad de la luz es un límite, ningún intento por superarla puede triunfar. Esto implica que cuando se componen velocidades, como cuando uno arroja una piedra mientras corre, los valores no pueden sumarse sin más. Si un tren está viajando a una velocidad v_{te} respecto a la Tierra, y alguien lanza una piedra en su interior con velocidad v_{st} respecto al tren, y en la misma dirección, normalmente se asume que como evidente que la velocidad de la piedra respecto a la Tierra será $v_{se} = v_{st} + v_{te}$. De hecho, tanto el razonamiento como el experimento muestran un resultado diferente.

La existencia de una velocidad máxima, junto con la Figura 97, implica que los factores k deben satisfacer $k_{se} = k_{st} k_{te}$.*Entonces sólo tenemos que insertar la relación (61) entre cada factor k y su respectiva velocidad para obtener (Desafío 361 e)

$$v_{se} = \frac{v_{st} + v_{te}}{1 + v_{st} v_{te}/c^2} . \tag{65}$$

(Desafío 362 e) Esta expresión se llama *fórmula de composición de velocidades*. El resultado nunca supera a c y siempre es menor que la (ingenua) suma directa de velocidades.**La expresión (65) se ha confirmado en todos los millones de casos en los que se ha puesto a prueba. Puedes comprobar que se reduce a la suma directa para valores pequeños de velocidad.

Página 232, página 544 Ref. 160

Observadores y el principio de la relatividad especial

La relatividad especial se construye a partir de un sólo principio:

* Tomando el logaritmo neperiano de esta ecuación, se puede definir una magnitud, la *rapidez*, que mide la velocidad y que es aditiva.

Ref. 167 ** Se puede deducir la transformación de Lorentz directamente de esta expresión.

▷ *La velocidad máxima a la que se puede transportar la energía es la misma para todos los observadores.*

Ref. 168 O, como le gustaba decir a Hendrik Lorentz:*

▷ *La velocidad v de un sistema físico está limitada por*

$$v \leqslant c \tag{66}$$

para todos los observadores, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Esta independencia de la velocidad de la luz respecto al observador fue comprobada con Ref. 169 gran precisión por Michelson y Morley**en los años 1887 y siguientes. En todos los experimentos realizados desde entonces, se ha confirmado igualmente con gran precisión. El Ref. 170 más preciso hasta la fecha, con una precisión de 10^{-14} se muestra en la Figura 98.

De hecho, la relatividad especial también se había confirmado por todos los experimentos precisos que se realizaron *antes* de que fuese formulada. Incluso puedes confirmarla tú mismo en casa. La forma de hacerlo se muestra en la sección sobre Página 544 electrodinámica.

La existencia de un límite a la velocidad tiene varias consecuencias interesantes. Para explorarlas, dejemos el resto de la física galileana intacta.***La velocidad límite es la velocidad de la luz. Es constante para todos los observadores. Esta invariancia implica:

— Desde dentro de una habitación cerrada, que flota libremente, no hay ninguna manera de medir la velocidad de la habitación.
— No existe el reposo absoluto (ni el espacio absoluto): el reposo (como el espacio) es un concepto que depende del observador.****
— El tiempo depende del observador; el tiempo no es absoluto.

* Hendrik Antoon Lorentz (b. 1853 Arnhem, d. 1928 Haarlem) fue, junto con Boltzmann y Kelvin, uno de los físicos más importantes de su época. Dedujo la transformación de Lorentz y la contracción de Lorentz a partir de las ecuaciones para el campo electromagnético de Maxwell. Fue el primero en entender, mucho antes de que la teoría cuántica confirmara la idea, que las ecuaciones de Maxwell para el vacío también describían la materia y todas sus propiedades, siempre y cuando se incluyeran partículas puntuales, cargadas y en movimiento – los electrones. En particular, demostró esto para la dispersión de la luz, el efecto Zeeman, el efecto Hall y el efecto Faraday. Propuso la descripción correcta de la fuerza de Lorentz. En 1902 recibió el Premio Nobel de física, junto con Pieter Zeeman. Aparte de su trabajo en la Física, fue un gran activista en la internacionalición de las colaboraciones científicas. También participó en la creación de las mayores estructuras construidas por el hombre en la Tierra: los “polders” de Zuyder Zee.

** Albert-Abraham Michelson (b. 1852 Strelno, d. 1931 Pasadena), físico pruso-polaco-estadounidense, ganador del Premio Nobel de física en 1907. Michelson llamó *interferómetro* al instrumento que diseño, un término aún en uso actualmente. Edward William Morley (1838–1923), químico estadounidense, era amigo de Michelson y su colaborador durante mucho tiempo.

*** Este punto es esencial. Por ejemplo, la física galileana establece que sólo el movimiento *relativo* tiene Página 94 significado físico. La física galileana también excluye varias formas matemáticamente posibles de conseguir una velocidad de la luz constante que contradiría la experiencia cotidiana.

El artículo original de Einstein de 1905 parte de dos principios: la constancia de la velocidad de la luz y la equivalencia de todos los observadores inerciales. El segundo principio ya fue establecido por Galileo en 1632; sólo la afirmación de que la velocidad de la luz es constante era nueva. A pesar de esto, la nueva teoría fue bautizada – por Poincaré – según el viejo principio, en lugar de llamarse ‘teoría de la invariancia’, que es Ref. 152 lo que el propio Einstein hubiese preferido.

Desafío 363 s **** ¿Podrías dar el argumento que lleva a esta deducción?

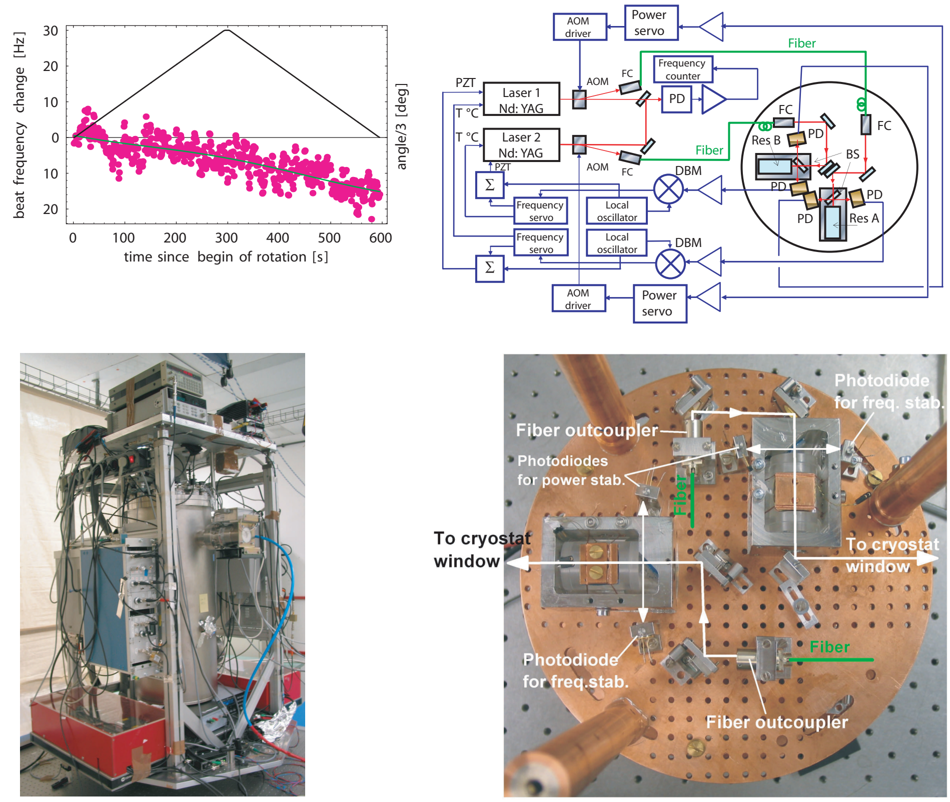

FIGURE 98 Resultados, esquema y montaje del experimento tipo Michelson-Morley más preciso realizado hasta la fecha (© Stephan Schiller).

Conclusiones más interesantes y específicas se pueden extraer cuando se asumen dos condiciones adicionales. Primera, estudiamos situaciones donde la gravedad puede despreciarse. (Si este no es el caso, necesitamos la relatividad *general* para describir el sistema.) Segunda, asumimos también que los datos sobre los cuerpos bajo estudio – sus velocidades, posiciones, etc. – pueden determinarse sin perturbarlos. (Si este no es el caso, necesitamos la *teoría cuántica* para describir el sistema.)

Si se observa que un cuerpo en ausencia de fuerzas viaja en línea recta con una velocidad constante (o permanecer en reposo), decimos que el observador es *inercial*, y su sistema de referencia es un *sistema inercial de referencia*. Todos los observadores inerciales son a su vez ejemplos de movimiento no perturbado. Ejemplos de observadores inerciales, por tanto, incluyen – en *dos* dimensiones – aquellos que se deslizan sin rozamiento sobre una superficie de hielo o están viajando en un tren o barco que se mueve en linea recta muy suavemente; para un ejemplo en las *tres* dimensiones espaciales podemos pensar en un cosmonauta viajando en una nave espacial con el motor apagado. Los observadores inerciales en tres dimensiones también conocen como observadores que *flotan libremente*. No son muy comunes. Los observadores no inerciales son mucho más numerosos. ¿Podrías confirmarlo? Los observadores inerciales son los más sencillos, y forman un conjunto especial:

Desafío 364 e

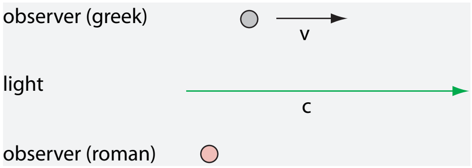

FIGURE 99 Dos observadores inerciales y un rayo de luz.

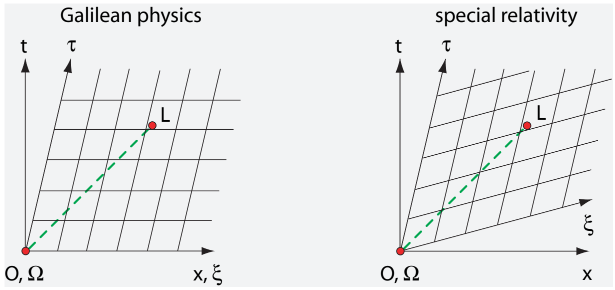

FIGURE 100 Diagramas espacio-tiempo para la luz vista desde dos observadores distintos, que utilizan las coordenadas (t, x) y (τ, ξ).

— Dos observadores inerciales cualesquiera se mueven siempre con velocidad relativa constante uno respecto del otro (siempre y cuando la gravedad sea despreciable, como se asumió anteriormente).

— Todos los observadores inerciales son equivalentes: describen el mundo con las mismas ecuaciones. Como esto implica que no existen ni espacio ni tiempos absolutos, esta afirmación fue llamada el *principio de la relatividad* por Henri Poincaré. Sin embargo, la *esencia* de la relatividad es la existencia de una velocidad límite.

Para ver cómo las medidas de longitudes e intervalos de tiempo cambian de un observador a otro, asumamos que hay dos observadores inerciales, un romano que usa coordenadas x, y, z y t, y un griego que usa ξ, υ, ζ y τ,* que se mueven con una velocidad relativa **v** uno respecto del otro. Los ejes se eligen de tal forma que la velocidad apunte en la dirección x. La constancia de la velocidad de la luz en cualquier dirección para cualquier par de observadores implica que el diferencial de las coordenadas cumple

$$0 = (c\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2 = (c\mathrm{d}\tau)^2 - (\mathrm{d}\xi)^2 - (\mathrm{d}\upsilon)^2 - (\mathrm{d}\zeta)^2 . \quad (67)$$

Asumamos también que hay un ‘flash’ en reposo respecto al observador griego, por tanto con $\mathrm{d}\xi = 0$, que produce dos fogonazos separados por un intervalo de tiempo $\mathrm{d}\tau$. Para el observador romano, el ‘flash’ se mueve con velocidad v, así que $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$. Insertando esta igualdad en la expresión anterior, y asumiendo linealidad e independencia de la dirección de la velocidad para el caso general, encontramos que los intervalos se relacionan

Desafío 365 e

* Los nombres, correspondencia con letras latinas, y pronunciación de todas las letras griegas se explican en el Appendix A.

mediante

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t &= \gamma(\mathrm{d}\tau + v\mathrm{d}\xi/c^2) = \frac{\mathrm{d}\tau + v\mathrm{d}\xi/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{con} \quad v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t \\
\mathrm{d}x &= \gamma(\mathrm{d}\xi + v\mathrm{d}\tau) = \frac{\mathrm{d}\xi + v\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
\mathrm{d}y &= \mathrm{d}\upsilon \\
\mathrm{d}z &= \mathrm{d}\zeta \ .
\end{aligned} \tag{68}$$

Estas expresiones describen cómo se relacionan las medidas de longitud e intervalos de tiempo de distintos observadores. A velocidades relativas v pequeñas respecto a la de la luz, como ocurre en la vida cotidiana, los intervalos de tiempo son esencialmente iguales; el *factor de dilatación* o la *corrección relativista* o la *contracción relativista* γ es esencialmente 1 para todos los casos prácticos. Sin embargo, para velocidades *cercanas* a la de la luz las medidas de dos observadores son distintas. En esos casos, el espacio y el tiempo se *mezclan*, como muestra la Figura 100.

Las expresiones (68) también son extrañas en otro aspecto. Cuando dos observadores se miran uno a otro, cada uno de ellos afirma que mide intervalos más cortos que el otro. En otras palabras, la relatividad especial nos dice que el cesped del otro lado de la valla es siempre *más corto* – si uno recorre la valla en bicicleta y el cesped está inclinado. Exploraremos este extraño resultado en más detalle en breve. Desafío 366 s

El factor de dilatación γ es igual a 1 para la mayoría de casos prácticos de la vida cotidiana. El mayor valor que han alcanzado los humanos es de unos $2 \cdot 10^5$; el mayor valor observado en la naturaleza supera 10^{12}. ¿Podrías imaginar dónde se encuentran? Desafío 367 s

Una vez que sabemos cómo cambian los *intervalos* de espacio y tiempo, podemos deducir fácilmente cómo cambian las *coordenadas*. La Figura 99 y la Figura 100 muestran que la coordenada x de un evento L es la suma de dos intervalos: la coordenada ξ y la distancia entre los dos orígenes. En otras palabras, tenemos

$$\xi = \gamma(x - vt) \quad \text{y} \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ . \tag{69}$$

Usando la invariancia del espacio-tiempo, llegamos a

$$\tau = \gamma(t - xv/c^2) \ . \tag{70}$$

Henri Poincaré llamó a estas dos relaciones las *trasformaciones de Lorentz del espacio y el tiempo* por su descubridor, el físico holandés Hendrik Antoon Lorentz.* En uno de los más bellos descubrimientos de la Física, en 1892 y 1904, Lorentz dedujo estas relaciones de las ecuaciones de la electrodinámica, donde habían estado tranquilamente esperando ser descubiertas desde 1865.** En ese año James Clerk Maxwell había publicado las ecua- Ref. 171 Página 555

* Para más información sobre Hendrik Antoon Lorentz, ver la página 208.

** El mismo descubrimiento fue publicado por primera vez en 1887 por el físico aleman Woldemar Voigt (1850–1919); Voigt – se pronuncia 'Fot' – también fue el descubridor del efecto Voigt y del tensor de Voigt. El físico irlandés George F. Fitzgerald también encontró este resultado, en 1889, de forma independiente.

ciones para describir todo sobre electricidad y magnetismo. Sin embargo, fue Einstein quien primero entendió que t y τ, igual que x y ξ, son igualmente correctas y por tanto igualmente válidas para describir el espacio y el tiempo.

La transformación de Lorentz describen el cambio de punto de vista de un sistema de referencia inercial a otro. Este cambio de punto de vista se conoce como *boost* (de Lorentz). Las fórmulas (69) y (70) para el boost son fundamentales para las teorías de la relatividad, tanto la especial como la general. De hecho, las matemáticas de la relatividad especial no son más difíciles que esto: si sabes lo que es una raíz cuadrada, puedes estudiar relatividad especial en todo su esplendor.

Se han explorado muchas formulaciones alternativas para el boost, tales como expresiones en las que se incluyen las aceleraciones de los dos observadores, además de la
Ref. 172
velocidad relativa. Sin embargo, todas ellas deben descartarse cuando se comparan sus predicciones con los experimentos. Antes de echar un vistazo a esos experimentos, continuemos con unas pocas deducciones lógicas de las relaciones del boost.

¿Qué es el espacio-tiempo?

> “Von Stund’ an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbstständigkeit bewaren.*
> Hermann Minkowski.”

Las transformaciones de Lorentz nos dicen algo importante: que el espacio y el tiempo son dos aspectos de la misma entidad básica. Ambos ‘se mezclan’ de diferente manera para observadores distintos. Este hecho se expresa comúnmente afirmando que el tiempo es la *cuarta dimensión*. Esto tiene sentido porque la entidad básica común – llamada *espacio-tiempo* – puede definirse como el conjunto de todos los eventos, *eventos* que se describen con cuatro coordenadas en el tiempo y el espacio, y porque el conjunto de todos
Desafío 368 s
los eventos tiene las propiedades de una variedad.** (¿Puedes confirmar esto?)

En otras palabras, la existencia de una velocidad máxima en la naturaleza nos obliga a introducir una variedad para el espacio-tiempo en nuestra descripción de la naturaleza. En la teoría de la relatividad especial, la variedad del espacio-tiempo se caracteriza por una propiedad sencilla: el *intervalo espacio-temporal* $\mathrm{d}i$ entre dos eventos cercanos,
Ref. 173
definido como

$$\mathrm{d}i^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = c^2\mathrm{d}t^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big) , \qquad (71)$$

es independiente del observador (inercial). Un espacio-tiempo con esta propiedad se conoce también como espacio-tiempo de Minkowski, en honor a Hermann Minkowski,***

* ‘De ahora en adelante el espacio en sí mismo y el tiempo en sí mismo caerán completamente en las sombras y sólo una especie de unión de los dos mantendrá su autonomía.’ Esta famosa cita fue la frase con la que Minkowski inició su charla en la reunión de la Gesellschaft für Naturforscher und Ärzte de 1908.

Página 1231
** El término matemático ‘variedad’ se define en el Apéndice D.

*** Hermann Minkowski (1864–1909), matemático alemán. Desarrolló ideas similares a las de Einstein, pero no fue tan rápido como él. Minkowski entonces desarrolló el concepto de espacio-tiempo. Minkowski murió repentinamente a la edad de 44 años.

el profesor de Albert Einstein. Minkowski fue el primero, en 1904, en definir el concepto de espacio-tiempo y en entender la su utilidad e importancia.

El intervalo espacio-temporal di de la ecuación (71) tiene una interpretación sencilla. Es el tiempo medido por un observador que se mueve desde el evento (t, x) al evento $(t + \mathrm{d}t, x + \mathrm{d}x)$, el llamado *tiempo propio*, multiplicado por c. Si ignoramos el factor c, podemos llamarlo simplemente tiempo 'de reloj'.

Vivimos en un espacio-tiempo de Minkowski, para entendernos. El espacio-tiempo de Minkowski existe independientemente de las cosas. E incluso aunque un sistema de referencia puede ser distinto de un observador a otro, la entidad subyaciente, el espacio-tiempo, sigue siendo *único*, incluso aunque el espacio y el tiempo mismos no lo sean.

¿En qué se distingue el espacio-tiempo de Minkowski del espacio-tiempo de Galileo, la combinación del tiempo y el espacio cotidianos? Ambos espacio-tiempos son variedades matemáticas – es decir, conjuntos continuos de puntos – con una dimensión temporal y tres espaciales, y ambas variedades tienen la topología de una esfera perforada. (¿Puedes
Desafío 369 s confirmar esto último?) Ambas variedades son planas, es decir con curvatura cero. En ambos casos, el espacio es lo que medimos con una regla o con un rayo de luz, y el tiempo es lo que leemos en un reloj. En ambos casos el espacio-tiempo es fundamental; es y será el *fondo* y el *contenedor* de las cosas y los eventos.

La principal diferencia, de hecho la única, es que el espacio-tiempo de Minkowski, a diferencia del galileano, *mezcla* espacio y tiempo y, en particular, lo hace de manera distinta para observadores con diferente velocidad, como muestra la Figura 100. Por esto es por lo que decimos que el tiempo es un concepto que depende del observador.

La velocidad máxima en la naturaleza nos fuerza a describir el movimiento con el espacio-tiempo. Esto es interesante, porque en el espacio-tiempo, hablando en términos sencillos, *el movimiento no existe*. El movimiento sólo existe en el espacio. En el espacio-tiempo nada se mueve. El espacio-tiempo contiene una línea de universo para cada partícula puntual. En otras palabras, en lugar de preguntarnos por qué existe el movimiento, debemos preguntarnos por qué el espacio-tiempo está surcado de líneas de universo. En este punto estamos lejos de poder responder ninguna de estas preguntas. Lo que sí podemos hacer es explorar *cómo* tiene lugar el movimiento.

¿Podemos viajar al pasado? – Tiempo y causalidad

Sabemos que el tiempo es distinto para observadores diferentes. ¿Ordena el tiempo los eventos en secuencias? La respuesta dada por la relatividad es un claro 'sí y no'. Ciertos conjuntos de eventos no están ordenados de forma natural en el tiempo; otros sí lo están. Esto se ve mejor en un diagrama espacio-temporal.

Claramente, dos eventos pueden ordenarse en una secuencia sólo si un evento es la *causa* del otro. Pero esta conexión sólo puede aplicarse a eventos en los que hay un intercambio de energía (por ejemplo mediante una señal). En otras palabras, una relación de causa y efecto entre dos eventos implica que energía o señales viajan de uno a otro; en consecuencia, la velocidad que conecta los dos eventos no puede mayor que la velocidad de la luz. La Figura 101 muestra que el evento E en el origen de coordenadas sólo puede ser influenciado por los eventos del cuadrante IV (el *cono de luz del pasado*, cuando se incluyen todas las dimensiones espaciales), y a su vez sólo puede influenciar aquellos eventos situados en el cuadrante II (el *cono de luz del futuro*). Los eventos de los cuadrantes I y

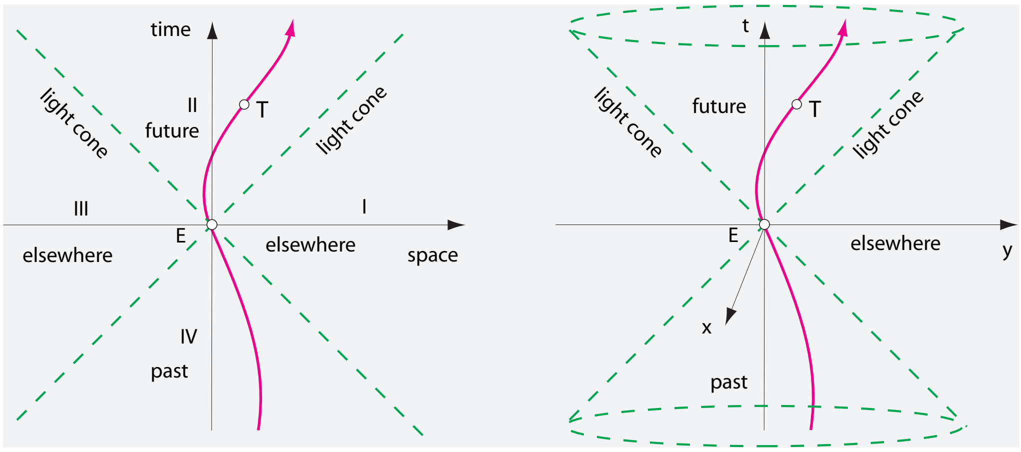

FIGURE 101 Un diagrama espacio-temporal de un objeto móvil T visto desde un observador inercial O en los casos con una y dos dimensiones espaciales.

III ni influyen ni son afectados por el evento E. El cono de luz define la frontera entre los eventos que *pueden* ordenarse con respecto a su origen – aquellos dentro del cono – y aquellos que *no pueden* – los que están fuera de los conos, que ocurren en otro lugar para todos los observadores. (Alguna gente llama a todos los eventos que suceden en algún otro lugar para todos los observadores *presente*.) Así, el tiempo ordena los eventos sólo *parcialmente*. Por ejemplo, para dos eventos que no están conectados causalmente, ¡su orden temporal (o su simultaneidad) depende del observador!

El particular, el cono de luz del pasado proporciona el conjunto completo de los eventos que pueden influenciar lo que ocurre en el origen. Se dice que el origen está *conectado causalmente* sólo con el cono de luz del pasado. Ten en cuenta que la conexión causal es un concepto invariante: todos los observadores están de acuerdo sobre si se aplica o no a
Desafío 370 s
un par dado de eventos. ¿Puedes confirmar esto?

Un vector dentro del cono de luz se dice que es de *tipo temporal*; uno en el propio cono de luz se dice de *tipo luz* o *nulo*; y uno fuera del cono se dice de *tipo espacial*. Por ejemplo, la *línea del universo* de un observador, es decir el conjunto de todos los eventos que forman su pasado y su futuro, consiste tan sólo de eventos de tipo temporal. El tiempo es la cuarta dimensión; expande el espacio a espacio-tiempo y 'completa' el espacio-tiempo. Esta es la relevancia de la cuarta dimensión para la teoría de la relatividad especial, ni más ni menos.

La relatividad especial nos enseña que la causalidad y el tiempo pueden definirse *sólo* porque existen los conos de luz. Si el transporte de energía a velocidades mayores que la de luz fuese posible, el tiempo no podría definirse. La Causalidad, es decir la posibilidad de ordenar (parcialmente) los eventos para todos los observadores, se debe a la existencia de una velocidad máxima.

Si la velocidad de la luz pudiese sobrepasarse de alguna manera, el futuro podría in-
Desafío 371 s
fluenciar al pasado. ¿Puedes confirmar esto? En tal situación, observaríamos efectos *acausales*. Sin embargo, hay un fenómeno cotidiano que nos dice que la velocidad de la luz es realmente máximal: nuestra memoria. Si el futuro pudiese influenciar al pasado, podríamos también *recordar* el futuro. Para decirlo con otras palabras, si el futuro pudiese

influenciar al pasado, el segundo principio de la termodinámica no sería válido y nuestra memoria no funcionaría.* Ningún dato de la vida cotidiana ni de los experimentos proporciona ninguna evidencia de que el futuro pueda influenciar al pasado. En otras palabras, *viajar por el tiempo al pasado es imposible*. Más adelante veremos de qué manera cambia la situación en la teoría cuántica. Curiosamente, viajar por el tiempo hacia el futuro *sí* es posible, como veremos pronto.

Curiosidades de la relatividad especial

Más rápido que la luz: ¿Cómo de lejos podemos viajar?

¿Cómo de lejos de la Tierra podemos viajar, teniendo en cuenta que el viaje no debe durar más que una vida humana – digamos 80 años – y que se nos permite utilizar un cohete cuya velocidad puede acercarse a la de la luz tanto como queramos? Dado el tiempo t que vamos a pasar en el cohete, dada su velocidad v y asumiendo con optimismo que el cohete puede acelerar y frenar en un lapso despreciable de tiempo, la distancia d
Desafío 372 e que podemos alejarnos viene dada por

$$d = \frac{vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \tag{72}$$

La distancia d es mayor que ct cuando $v > 0{,}71c$ y, si v se elige suficientemente grande, ¡crece sin ningún límite! En otras palabras, la relatividad *no* limita la distancia que podemos viajar en una vida humana, ni siquiera la que podemos viajar en un sólo segundo. Podríamos, en principio, viajar por todo el universo en menos de un segundo. En situaciones tales como estas tiene sentido introducir el concepto de *velocidad propia* w, definida como

$$w = d/t = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma\, v \,. \tag{73}$$

Como acabamos de ver, la velocidad propia *no* está limitada por la velocidad de la luz; de hecho la velocidad propia de la luz es infinita.**

Sincronización y viaje en el tiempo – ¿Puede una madre permanecer más joven que su propia hija?

Una velocidad máxima implica que el tiempo es diferente para observadores que se mueven unos respecto de otros. Por tanto, tenemos que ser cuidadosos a la hora de sin-

* Hay otro resultado relacionado con éste que poco a poco se está convirtiendo en conocimiento común. Incluso aunque el espacio-tiempo tuviera una forma no trivial, tal y como una topología cilíndrica con curvas tipo temporal cerradas, aún sería imposible viajar al pasado, al contrario de como sugieren muchas
Ref. 174 novelas de ciencia-ficción. Stephen Blau ha dejado esto claro en un artículo pedagógico reciente.
** Utilizando la velocidad propia, la relación dada por la ecuación (65) para la superposición de dos veloci-
Desafío 373 e dades $\mathbf{w}_a = \gamma_a \mathbf{v}_a$ y $\mathbf{w}_b = \gamma_b \mathbf{v}_b$ se simplifica a

$$w_{s\parallel} = \gamma_a \gamma_b (v_a + v_{b\parallel}) \quad \text{y} \quad w_{s\perp} = w_{b\perp} \,, \tag{74}$$

donde los signos $\parallel$ y $\perp$ designan las componentes paralela y perpendicular a la dirección de $\mathbf{v}_a$, respectiva-
Ref. 175 mente. De hecho, podemos expresar toda la relatividad especial en términos de magnitudes 'propias'.

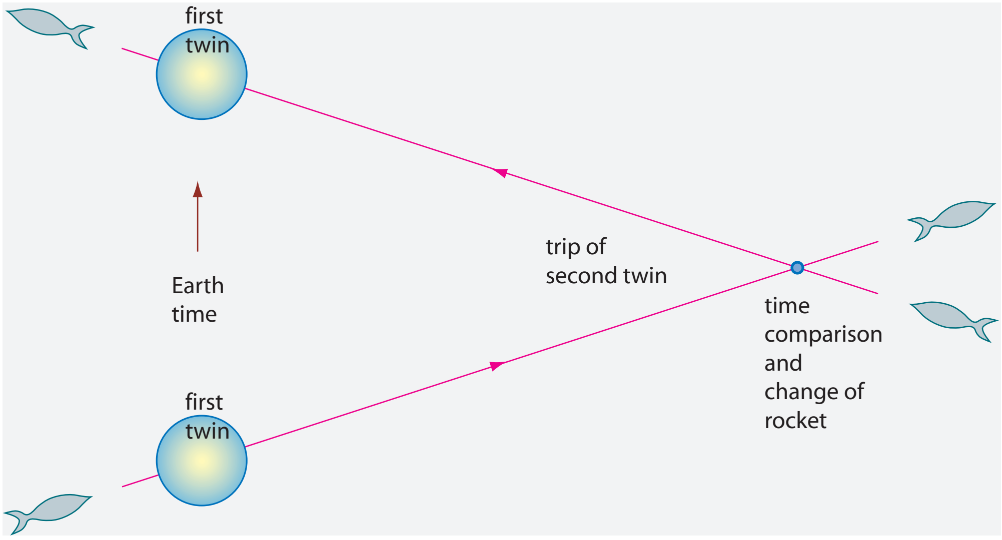

FIGURE 102 La paradoja de los gemelos

cronizar relojes que están separados, incluso aunque estén en reposo uno respecto al otro en un sistema de coordenadas inercial. Por ejemplo, si tenemos dos relojes similares que muestran la misma hora, y llevamos uno de ellos durante un paseo de ida y vuelta, mostrarán horas distintas a la vuelta del paseo. Este experimento se ha realizado varias veces y ha confirmado totalmente la predicción de la relatividad especial. La diferencia de tiempo de una persona o un reloj viajando en un avión que da una vuelta a la Tierra a unos 900 km/h se del orden de 100 ns – no muy apreciable en la vida cotidiana- De hecho, el retraso puede calcularse fácilmente de la expresión

Ref. 176, Ref. 177

$$\frac{t}{t'} = \gamma \;. \tag{75}$$

Los seres humanos son relojes; muestran el tiempo transcurrido, normalmente llamado *edad*, mediante diversos cambios en su forma, peso, color de pelo, etc. si una persona hace un viaje largo y muy rápido, a su regreso habrá envejecido *menos* que otra persona que haya permanecido en su casa (inercial).

El ejemplo más famoso de esto es la *paradoja de los gemelos* (o *paradoja de los relojes*). Un joven deseoso de aventura sube a un cohete relativista que deja la Tierra y viaja durante muchos años. Lejos de la Tierra, salta sobre otro cohete relativista que viaja en sentido contrario y regresa a la Tierra. El viaje se ilustra en la Figura 102. A su regreso, descubre que su hermano gemelo, que ha quedado en la Tierra, es mucho más viejo que él. ¿Puedes explicar este resultado, especialmente la asimetría entre los dos hermanos? Este resultado también ha sido confirmado por muchos experimentos.

Ref. 178

La relatividad especial confirma, de una manera sorprendente, la observación bien sabida de que aquellos que viajan se mantienen más jóvenes. El precio pagado por la juventud es, sin embargo, que todo alrededor de uno cambia mucho más rápidamente que si uno se quedase en reposo con su entorno.

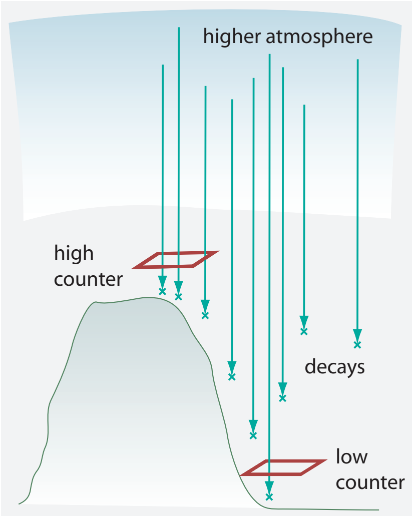

FIGURE 103 Más muones de los esperados llegan al suelo debido a que al viajar muy rápido se mantienen jóvenes.

La paradoja de los gemelos también puede verse como una confirmación de la posibilidad de viajar por el tiempo hacia el futuro. Con la ayuda de un cohete rápido que vuelva a su punto de partida, podemos llegar a horas locales que nunca hubiésemos alcanzado con nuestra vida permaneciendo en casa. Eso sí, *nunca* podremos volver al pasado.*

Uno de los experimentos más sencillos que confirman la juventud prolongada de los viajeros rápidos tiene que ver con contar muones. Los muones son partículas que se forman continuamente en las capas altas de la atmósfera debido a la radiación cósmica. Los muones *en reposo* (con respecto al reloj de medida) tienen una vida media de 2,2 μs (o, a la velocidad de la luz, 660 m). Después de este lapso de tiempo, la mitad de los muones se ha desintegrado. Esta vida media puede medirse utilizando un sencillo contador de muones. Además, existen contadores de muones que sólo cuentan aquellos que viajan con una velocidad dentro de un determinado intervalo, digamos entre $0{,}9950c$ y $0{,}9954c$. Podemos poner uno de esos contadores especiales en la cima de una montaña y otro en un valle cercano, como muestra la Figura 103. La primera vez que se realizó este experimento, la diferencia de altura fue de 1,9 km. Viajar 1,9 km a través de la atmósfera a la velocidad mencionada toma alrededor de 6,4 μs. Con la vida media indicada anteriormente, un primer cálculo nos da que sólo un 13 % de los muones observados en la cima llegará al valle. Sin embargo, se observa que alrededor del 82 % de los muones llegan abajo. El motivo de este resultado es la dilatación temporal relativista. De hecho, a la velocidad mencionada, los muones experimentan una diferencia temporal de sólo 0,62 μs durante su viaje desde la cima de la montaña al fondo del valle. Este tiempo tan corto da un número de desintegraciones muónicas mucho menor que el que se tendría sin dilatación temporal; más aún, el porcentaje medido confirma el valor predicho por el factor de dilatación γ dentro de los márgenes de error experimentales, como puedes comprobar. Un efecto similar se

Página 919
Ref. 180
Desafío 374 s
Desafío 375 s

Ref. 179
* Hay incluso libros especializados en el viaje en el tiempo, tales como el bien documentado texto de Nahin. Nótese que el concepto de viaje en el tiempo tiene que definirse con claridad; de lo contrario nos quedamos sin respuestas frente a un oficinista que dice que su sillón de oficina es una *máquina del tiempo*, ya que al sentarse sobre él viaja al futuro.

observa cuando los muones relativistas se producen en aceleradores de laboratorio.

El aumento de la vida media también se ha encontrado en otros muchos sistemas inestables, tales como los piones, átomos de hidrógeno, átomos de neón y varios núcleos, siempre confirmando las predicciones de la relatividad especial. Puesto que todos los cuerpos en la naturaleza están compuestos por partículas, el 'efecto rejuvenecedor' de las velocidades elevadas (normalmente llamado 'dilatación temporal') se aplica a cuerpos de todos los tamaños; de hecho, no sólo se ha observado para partículas, también para lasers, transmisores de radio y relojes. Ref. 160

Si el movimiento lleva a la dilatación temporal, un reloj en el Ecuador, constantemente girando alrededor de la Tierra, debería ir más lento que uno situado en los polos. Sin embargo, esta predicción, que fue hecha por el propio Einstein, es incorrecta. Ref. 181 La aceleración centrífuga lleva a una reducción de la aceleración de la gravedad que cancela exactamente el incremento en la velocidad. Esta historia sirve como recordatorio de que hay que ser cuidadoso cuando se aplica la relatividad especial a situaciones en las que aparece la gravedad. La relatividad especial sólo es aplicable cuando el espacio-tiempo es plano, no cuando la gravedad está presente.

Resumiendo, una madre *puede* permanecer más joven que su hija. También podemos concluir que no podemos sincronizar relojes en reposo uno respecto del otro simplemente andando, con el reloj en la mano, de un lugar al otro. La forma correcta de hacerlo es mediante un intercambio de señales luminosas. ¿Puedes describir cómo? Desafío 376 s

Una definición precisa de la sincronización nos permite llamar simultáneos a dos eventos distantes entre sí. Además, la relatividad especial nos muestra que la simultaneidad depende del observador. Esto ha sido confirmado por todos los experimentos realizados hasta ahora.

Sin embargo, el deseo de la madre no es fácil de satisfacer. Imaginemos que una mujer es acelerada en una nave espacial alejándose de la Tierra a $10\,\mathrm{m/s^2}$ durante diez años, después frena a $10\,\mathrm{m/s^2}$ durante otros diez años, entonces acelera otros diez años hacia la Tierra y, finalmente, frena durante diez años más hasta aterrizar suavemente de nuevo en nuestro planeta. La mujer ha estado viajando durante cuarenta años, llegando a estar a 22 000 años-luz de la Tierra. A su regreso, han pasado 44 000 años. Todo esto parece bien, hasta que nos damos cuenta de que la cantidad de combustible necesaria, incluso para el más eficiente de los motores imaginables, es tan grande que la masa que puede regresar de este viaje es sólo una parte entre $2 \cdot 10^{19}$. Semejante cantidad de combustible no existe en la Tierra. Desafío 377 e

Contracción de las longitudes

La longitud de un objeto medida por un observador solidario al objeto se llama longitud propia. Según la relatividad especial, la longitud medida por un observador inercial en movimiento siempre es menor que la longitud propia. Este resultado es una consecuencia directa de las transformaciones de Lorentz. Desafío 378 e

Para un Ferrari que marcha a 300 km/h o 83 m/s, la longitud se contrae en 0,15 pm: menos que el diámetro de un protón. Vista desde el Sol, la Tierra se mueve a 30 km/s; lo que nos da una contracción en longitud de 6 cm. Ninguno de estos efectos se ha medido jamás. Pero otros efectos mayores podrían medirse. Veamos algunos ejemplos.

Imagina un piloto volando a través de un establo con dos puertas, una a cada extremo.

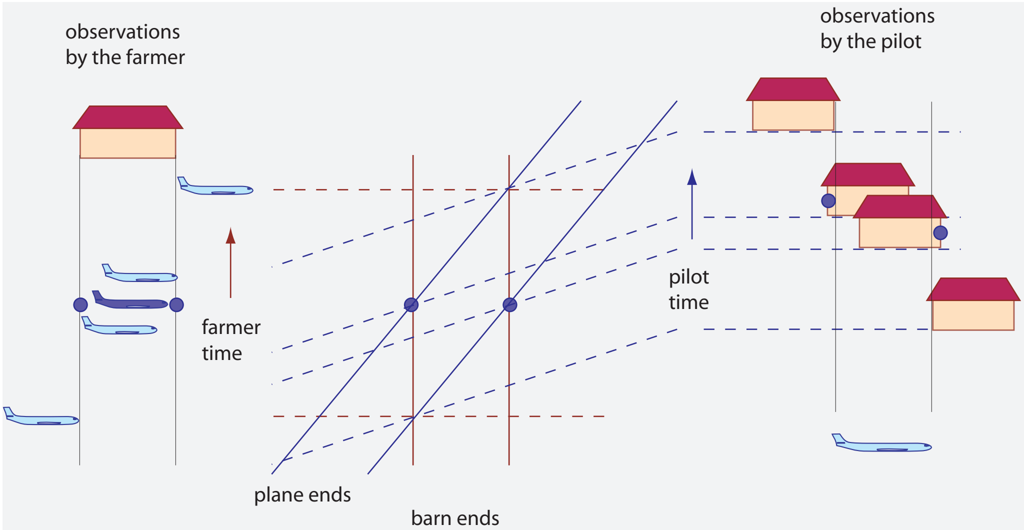

FIGURE 104 Las apreciaciones del piloto y del dueño del establo.

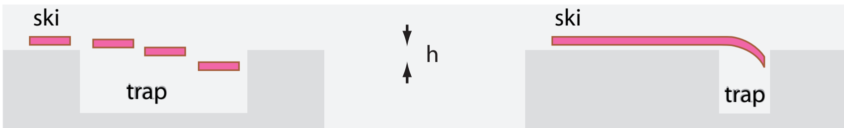

FIGURE 105 Las apreciaciones de un cavador de agujeros y de un hombre haciendo snowboard, tal y como (equivocadamente) se han publicado en otros textos.

El avión es ligeramente más largo que el establo, pero se mueve tan rápido que su longitud es relativísticamente contraída hasta ser menor que la longitud del establo. ¿Puede cerrar el granjero el establo (al menos durante un breve lapso de tiempo) con el avión completamente en su interior? La respuesta es afirmativa. Pero, ¿por qué no puede decir el piloto lo siguiente: respecto a él, el establo se ha contraído; por tanto el avión no cabe dentro? La respuesta se muestra en la Figura 104. Para el granjero, las puertas se cierran (y vuelven a abrir) al mismo tiempo. Para el piloto, no. Para el granjero, el piloto está a oscuras durante un corto periodo de tiempo; para el piloto, el establo nunca está a oscuras.
Desafío 379 s (Esto no es completamente cierto: ¿podrías revelar los detalles?)

Exploremos ahora algunas variaciones del caso general. ¿Puede un hombre haciendo snowboard muy rápido caer dentro de un agujero que sea un poco más corto que su tabla? Imaginemos que baja tan rápido que el factor de contracción en longitud es $\gamma = d/d'$ is 4.* Para un observador en el suelo, la tabla de snowboard es cuatro veces más corta, y cuando pasa sobre el agujero, caerá dentro de él. Sin embargo, para el esquiador, es el agujero el que es cuatro veces más corto; parece que la tabla no podrá caer dentro.

Ref. 182 Un análisis más cuidadoso muestra que, a diferencia de lo que observa el cavador de agujeros, el esquiador no aprecia que la forma de la tabla sea fija: mientras pasa sobre el agujero, el esquiador observa que la tabla toma una forma parabólica y cae dentro

* Incluso la Tierra se contrae en la dirección de su movimiento de traslación alrededor del Sol. ¿Se puede
Desafío 380 s medir este efecto?

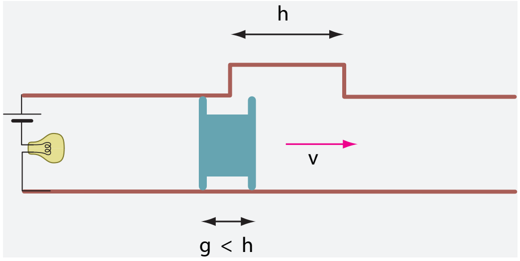

FIGURE 106 ¿Mantiene la lámpara encendida el conector móvil a altas velocidades?

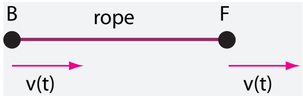

FIGURE 107 ¿Qué le ocurre a la cuerda?

Desafío 381 e del agujero, como muestra la Figura 105. ¿Puedes confirmar esto? En otras palabras, la forma no es un concepto independiente del observador. (Sin embargo, la rigidez *sí* es Desafío 382 s independiente del observador, si se define adecuadamente; ¿puedes confirmar esto?)

Esta explicación, aunque publicada, no es correcta, como Harald van Lintel y Christian Ref. 183 Gruber han apuntado. Uno no debería olvidar estimar el tamaño del efecto. A velocidades relativistas, el tiempo que requiere el agujero para afectar a todo el grosor de la tabla no es despreciable. El esquiador sólo ve que su tabla adopta una forma parabólica si ésta es extremadamente fina y flexible. Para una tabla normal a velocidades relativistas, el esquiador no tiene tiempo de caer ninguna altura h apreciable ni de entrar en el agujero antes de sobrepasarlo. La Figura 105 está tan exagerada que es incorrecta. El esquiador simplemente pasará volando sobre el agujero.

Las paradojas acerca de la contracción de longitudes resultan incluso más interesantes Ref. 184 en el caso de conductores móviles que hacen contacto entre dos raíles, como muestra la Figura 106. Los dos raíles son paralelos, pero uno de ellos tiene un huevo más largo que el conector. ¿Puedes determinar si una lámpara conectada en serie se mantendrá encendida Desafío 383 s cuando el conector desliza sobre los raíles a una velocidad relativista? (Haz la simplificación no muy realista de que la corriente eléctrica fluye en el mismo instante en el que el conector toca los raíles.) ¿Obtienes el mismo resultado para todos los observadores? Y, ¿qué ocurre cuando el conector es más largo que el hueco? ¿O cuando se acerca a la lámpara desde el otro lado? (Aviso: ¡este problema suscita debates *acalorados*!) ¿Qué no es realista en este experimento?

Ref. 185 Otro ejemplo de contracción de longitudes aparece cuando dos objetos, digamos dos coches, están conectados a una distancia d por una cuerda, como se muestra en la Figura 107. Imagina que ambos están en reposo en el instante $t = 0$ y entonces son acelerados juntos y de la misma manera. El observador en reposo mantendrá que los dos coches permanecen separados por la misma distancia. Por otra parte, la cuerda necesita expandirse a una distancia $d' = d/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ y, por tanto, tiene que expandirse mientras los coches están acelerando. En otras palabras, la cuerda se romperá. ¿Se confirma esta Desafío 384 s predicción para los observadores situados en cada uno de los dos coches?

Un ejemplo divertido – pero bastante poco realista – de contracción de longitudes es Ref. 186 el de un submarino relativista que se mueve horizontalmente. Imagina que el submarino en reposo ha elegido su peso para mantenerse sumergido en el agua sin ninguna tendencia ni a flotar ni a hundirse. Ahora el submarino se mueve (posiblemente con velocidad relativista). El capitán observa que el agua del exterior se contrae según las relaciones de

Lorentz; por tanto ahora es más densa y deduce que el submarino flotará. Un pez cercano ve que el submarino se ha contraído y, por tanto, es más denso que el agua, así que deduce que se hundirá. ¿Quién está equivocado, y cuál es la fuerza de flotación aquí? Una pregunta alternativa: ¿por qué es imposible que un submarino se mueva velocidades relativistas?

Desafío 385 s
Desafío 386 s

Resumiendo, la contracción de longitudes casi nunca puede observarse en situaciones realistas en cuerpos macroscópicos. Sin embargo, juega un papel importante para las *imágenes*.

Películas relativistas – aberración y efecto Doppler

Hemos encontrado varias formas en las que cambian las observaciones cuando un observador se mueve a gran velocidad. En primer lugar, la contracción de Lorentz y la aberración dan lugar a imágenes *distorsionadas*. En segundo lugar, la aberración aumenta el ángulo de visión más allá de los 180 grados a los que los humanos estamos acostumbrados en el día a día. Un observador relativista que mira en la dirección de su movimiento ve luz que es invisible para un observador en reposo porque, para este último, viene desde atrás. En tercer lugar, el efecto Doppler produce un *corrimiento en el color* de las imágenes. En cuarto lugar, el movimiento rápido cambia el *brillo* y el *contraste* de la imagen: es el llamado *efecto foco*. Cada uno de estos cambios depende de la dirección a la que miramos; se muestran en la Figura 109.

Los ordenadores modernos nos permiten simular las observaciones que harían observadores relativistas con calidad fotográfica e, incluso, producir películas simuladas.* Las imágenes de la Figura 108 nos son especialmente útiles para entender la distorsión de las imágenes. Muestran el ángulo de visión, el círculo que distingue los objetos en frente del observador de los que están tras él, las coordenadas de los pies del observador y el punto en el horizonte hacia el que el observador se está moviendo. Añadir mentalmente estas marcas al mirar otras películas o dibujos puede ayudarte a entender más claramente lo que muestran.

Debemos destacar que la forma de las imágenes vistas por un observador en movimiento son una versión *distorsionada* de lo que vería uno en reposo en ese mismo punto. Un observador en movimiento, sin embargo, no ve cosas distintas que las que vería uno en reposo en el mismo punto. De hecho, los conos de luz son independientes del movimiento del observador.

Ref. 187
Página 193

La contracción de Lorentz se puede medir; sin embargo, no se puede fotografiar. Esta distinción tan sorprendente no fue descubierta hasta 1959. Medir implica simultaneidad con la posición del observador. En una fotografía, la contracción de Lorentz se modifica por los efectos debidos a los distintos tiempos que necesita la luz para llegar a distintas partes del objeto; el resultado es un cambio en la forma que recuerda a una rotación, pero no es exactamente eso. La deformación total es una aberración que depende del ángulo. Discutimos las aberraciones al principio de esta sección. La aberración transforma circunferencias en circunferencias: una transformación así se llama *conformal*.

* Ver, por ejemplo, las imágenes y películas en http://www.anu.edu.au/Physics/Searle de Anthony Searle, en http://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~weiskopf/gallery/index.html por Daniel Weiskopf, en http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon/stonehenge/stone1.htm por Norbert Dragon y Nicolai Mokros, o en http://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de por el grupo de Hanns Ruder.

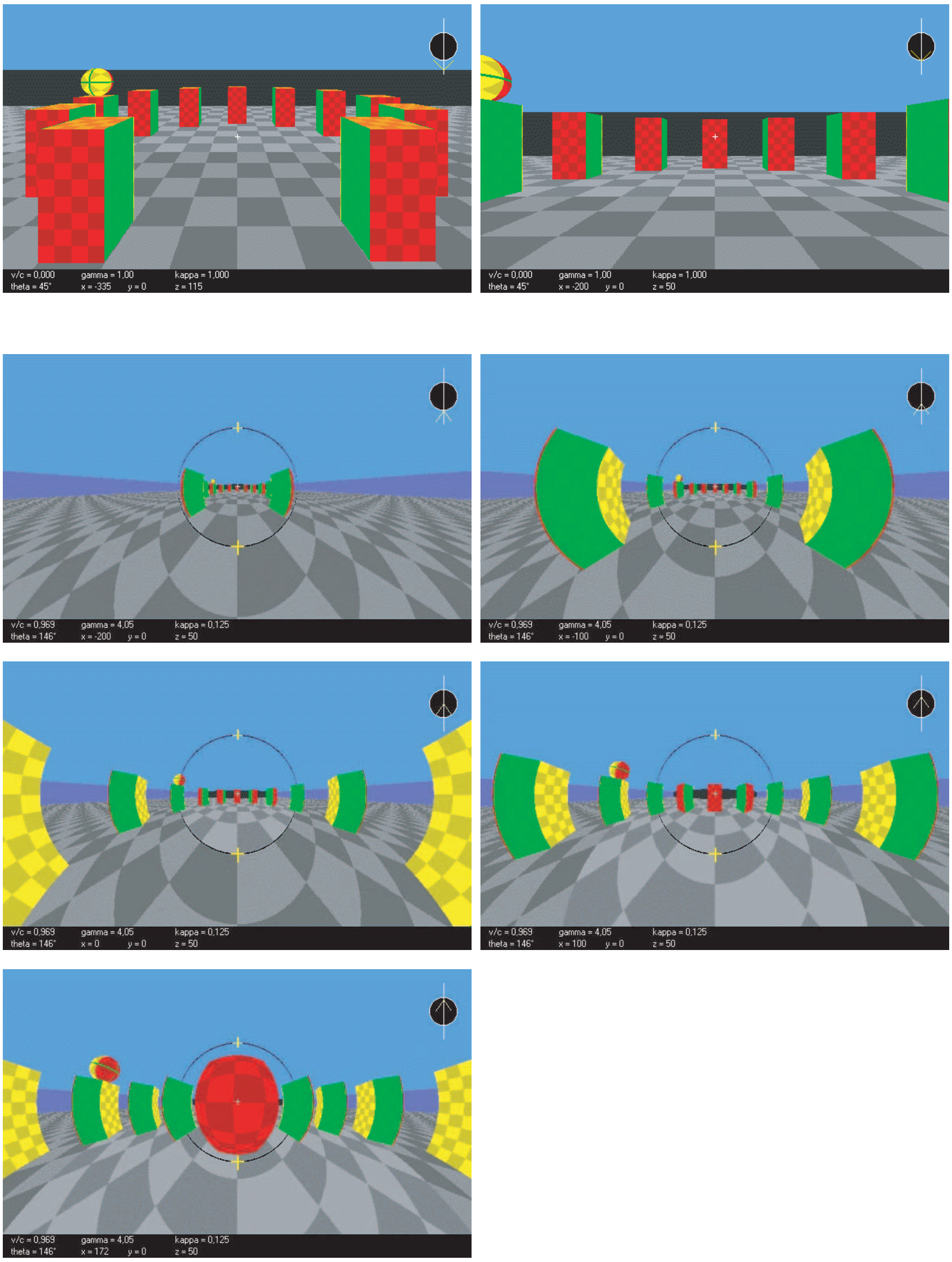

FIGURE 108 Vuelo a través de doce columnas verticales (mostradas en las dos imágenes de arriba) a una velocidad 0.9 veces la de la luz, según Nicolai Mokros and Norbert Dragon, que muestra el efecto de la velocidad y la posición en las distorsiones (© Nicolai Mokros)

FIGURE 109 Vuelo a través de tres columnas rectas y verticales a 0.9 veces la velocidad de la luz, según Daniel Weiskopf: a la izquierda con sus colores originales; en el centro incluyendo el efecto Doppler; y a la derecha incluyendo los efectos de cambio de brillo, es decir, mostrando lo que un observador vería realmente (© Daniel Weiskopf)

FIGURE 110 Lo que observan un investigador en reposo y otro corriendo rápidamente por un corredor (ignorando los efectos de color) (© Daniel Weiskopf)

Las imágenes de la Figura 110, producidas por Daniel Weiskopf, también incluyen el efecto Doppler y los cambios de brillo. Muestran que estos efectos son al menos tan importantes como la distorsión debida a la aberración.

Esto lleva a la 'paradoja del collar de perlas'. Si el movimiento relativista transforma esferas en esferas, y cilindros en cilindros más cortos, ¿qué ocurre con un collar de perlas que se mueve sobre su propio eje longitudinal? ¿Se hace más corto? Desafío 387 s

Hay mucho más que explorar usando películas relativistas. Por ejemplo, el autor predice que las películas de esferas rotando rápidamente en movimiento revelarán efectos

Desafío 388 r interesantes. También en este caso, la observación óptica y la medida llevarán a resultados diferentes. Para cierta combinación de rotaciones relativistas y acelerones relativistas, se predijo* que el sentido de rotación (en sentido de las agujas del reloj, o el contrario) será *diferente* para observadores diferentes. Este efecto jugará un papel interesante en la discusión de la unificación.

¿Cuál es el mejor asiento en un autobús?

Ref. 185 Exploremos otra sorpresa de la relatividad especial. Imagine dos gemelos dentro de dos coches que aceleran de la misma forma, uno en frente del otro, empezando desde el reposo en el instante $t = 0$, descrito por un observador en reposo respecto a ambos. (Ahora no hay ninguna cuerda entre ellos.) Ambos coches contienen la misma cantidad de combustible. Fácilmente deducimos que la aceleración de los gemelos se detiene cuando se acaba el combustible, en el mismo instante en el sistema de referencia del observador exterior. Desafío 389 e Además, la distancia entre los coches se ha mantenido inalterada para el observador exterior, y los dos coches continúan corriendo con la misma velocidad constante v, siempre y cuando despreciemos la fricción. Si llamamos a los eventos en los que el coche de delante y el de detrás apagan sus motores f y b, sus coordenadas temporales en el sistema de referencia exterior están relacionados simplemente por $t_f = t_b$. Usando las transformaciones de Lorentz podemos deducir que en sistema de referencia de los Desafío 390 e gemelos la relación es

$$t_b = \gamma \Delta x\, v/c^2 + t_f\ , \tag{76}$$

lo que significa que ¡el gemelo del coche de delante a envejecido *más* que el de detrás! Así, en sistemas acelerados, envejecer depende de la posición.

Para elegir un asiento en un autobús, sin embargo, este resultado no ayuda. Es verdad que el mejor asiento en un autobús que está acelerando es el de detrás, pero cuando está frenando, es el de delante. Al terminar el viaje, la elección de asiento no importa.

¿Es correcto deducir que la gente que vive en montañas altas envejece más rápido que Desafío 391 s la que vive en valles, de manera que vivir en un valle ayuda a posponer las canas?

¿Cómo de rápido podemos andar?

Andar significa mover los pies de tal manera que en todo momento al menos uno de ellos esté en contacto con el suelo. Esta es una de las reglas que los atletas tienen que seguir en las competiciones de marcha olímpica; son descalificados si la incumplen. Un estudiante atleta estaba pensando acerca de cuál es la máxima velocidad que se podría conseguir en unos Juegos Olímpicos. Lo ideal sería que cada pie acelerara casi instantáneamente hasta (casi) la velocidad de la luz. La máxima velocidad de marcha se conseguiría separando el segundo pie del suelo exactamente en el mismo instante en el que el primero tocase el suelo. Por 'mismo instante', el estudiante originariamente quería decir 'visto por el juez de la competición, que está en reposo respecto a la Tierra'. El movimiento del pie se muestra en el diagrama de la izquierda de la Figura 111; nos da un límite a la velocidad de marcha de la mitad de la velocidad de la luz. Pero entonces el estudiante se dio cuenta de que un juez *en movimiento* vería ambos pies separados del suelo y, por tanto, descalifi-

* En julio de 2005.

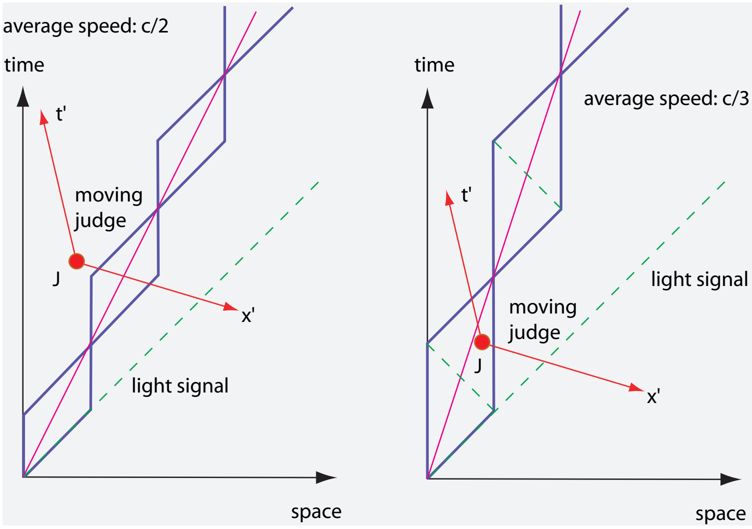

FIGURE 111 Para el atleta de la izquierda, el juez en movimiento en el sentido contrario ve ambos pies separados del suelo en algunos instantes, pero no para el atleta de la derecha.

Ref. 188 caría al atleta por correr. Para evitar la descalificación por *cualquier* juez, el segundo pie tiene que esperar a que una señal de luz viaje desde el primer pie. La velocidad máxima de la marcha olímpica es, por tanto, un tercio de la de la luz.

¿Es la velocidad de la sombra mayor que la de la luz?

En realidad, movimientos más rápido que el de la luz existen y son incluso bastante comunes. La relatividad especial sólo restringe el movimiento de la masa y la energía. Sin embargo, los puntos no materiales, los fenómenos que no transportan energía y las imágenes *sí* pueden moverse más rápido que la luz. Hay varios ejemplos sencillos. Para aclararnos, no estamos hablando de la velocidad *propia* que, en estos casos, ni tan si quiera puede definirse. (¿Por qué?) Página 215 Desafío 392 s

Los siguientes ejemplos muestran velocidades que son genuinamente mayores que la velocidad de la luz en el vacío.

Considera el punto marcado con una X en la Figura 112, el punto en el que las tijeras cortan el papel. Si las tijeras se cierran suficientemente rápido, este punto se mueve más rápido que la luz. Ejemplos similares se pueden encontrar en todos los marcos de ventana y, de hecho, en cualquier dispositivo que tenga partes giratorias.

Otro ejemplo de movimiento superlumínico es una grabación musical – un LP pasado de moda – desapareciendo en su cartón, como muestra la Figura 113. El punto en el que el borde del disco coincide con el borde del cartón puede viajar más rápido que la luz.

Otro ejemplo se sugiere a sí mismo cuando recordamos que vivimos en un planeta esférico. Imagina que te tumbas en el suelo y te levantas. ¿Puedes mostrar que la velocidad inicial con la que se aleja el horizonte de ti puede ser mayor que la de la luz? Desafío 393 s

Finalmente, un ejemplo clásico es el del movimiento de un punto de luz producido por un haz laser sobre la Luna. Si se mueve el laser, el punto fácilmente puede desplazarse sobre la superficie de la Luna más rápido que la luz. Lo mismo se aplica al punto de luz en la

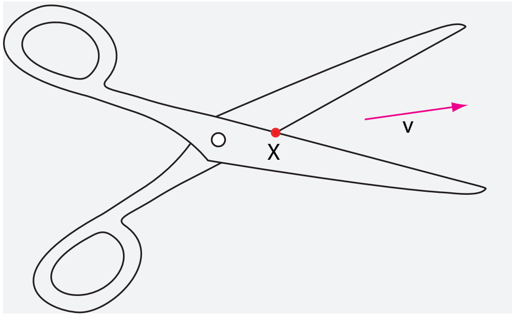

FIGURE 112 Un ejemplo sencillo de un movimiento que es más rápido que el de la luz.

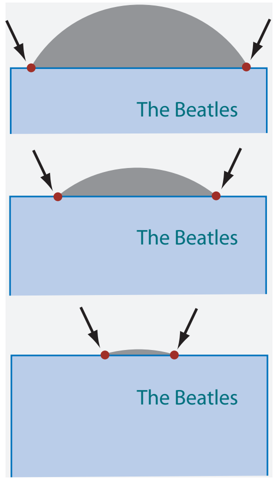

FIGURE 113 Otro ejemplo de movimiento más rápido que la luz.

pantalla de un osciloscopio cuando se aplica una señal de una frecuencia suficientemente alta en su entrada.

Todos estos son ejemplos típicos de *movimiento de sombras*, a veces también llamado la *velocidad de la oscuridad*. Tanto sombras como oscuridad pueden realmente moverse más rápido que la luz. De hecho, no hay límite para su velocidad. ¿Puedes encontrar otro ejemplo? Desafío 394 s

Además, hay un número siempre creciente de dispositivos experimentales en los que la velocidad de fase o incluso la velocidad de grupo de la luz es mayor que c. Estos experimentos aparecen en los titulares de los periódicos de vez en cuando, junto con afirmaciones del tipo 'la luz se mueve más rápido que la luz'. Discutiremos este sorprendente fenómeno en más detalle más adelante. Página 591 De hecho, estos casos también pueden verse – con algo de imaginación – como casos especiales del fenómeno de la 'velocidad de las sombras'.

Para un ejemplo diferente, imaginemos que estamos parados a la salida de un túnel de longitud l. Vemos un coche, cuya velocidad sabemos que es v, entrando por el otro extremo del túnel y dirigiéndose hacia nosotros. Sabemos que ha entrado en el túnel porque el coche ya no está al sol o porque encendió los faros en ese momento. ¿En qué instante t, tras que veamos que entra en el túnel, se cruza con nosotros? Un razonamiento sencillo nos muestra que t está dado por

$$t = l/v - l/c \,. \qquad (77)$$

En otras palabras, el coche que se acerca parece tener una velocidad v_{appr} de

$$v_{\text{appr}} = \frac{l}{t} = \frac{vc}{c - v} \,, \qquad (78)$$

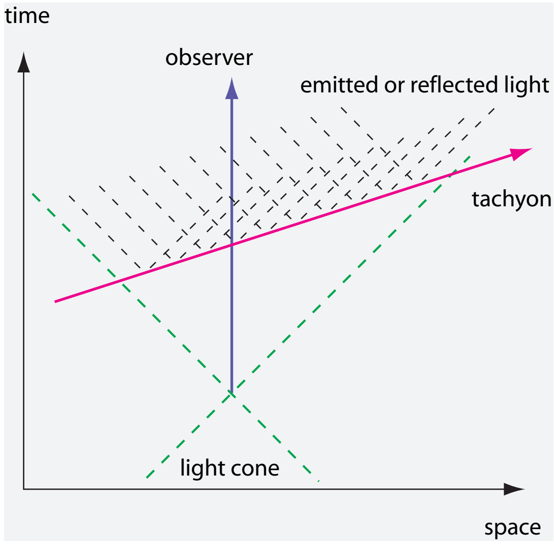

FIGURE 114 Diagrama espacio-tiempo de una hipotética observación de un taquión.

que es mayor que c para cualquier velocidad del coche v mayor que $c/2$. Para los coches esto no debe ocurrir muy a menudo, pero los astrónomos conocen un tipo de objeto brillante llamado *quasar* (una contracción de 'objeto cuasi-estelar'), que algunas veces emite chorros de gas a gran velocidad. Si la emisión ocurre en una dirección cercana a la Tierra, su velocidad aparente – incluso la componente puramente transversal – es mayor
Ref. 189 que c. Tales situaciones se observan regularmente con telescopios.

Destaquemos que, para un segundo observador en la *entrada* del túnel, la velocidad aparente del coche que *se aleja* viene dada por

$$v_{\text{leav}} = \frac{vc}{c+v} , \qquad (79)$$

que *nunca* es mayor que $c/2$. En otras palabras, los objetos nunca se ven alejarse a más de la mitad de la velocidad de la luz.

La historia tiene un giro final. Acabamos de ver que el movimiento más rápido que la luz puede observarse de varias maneras. Pero, ¿podría un *objeto* que se mueve más rápido que la luz ser observado en absoluto? Sorprendentemente, sólo podría observarse de una manera muy inusual. En primer lugar, puesto que tal objeto imaginario – normalmente llamado *taquión* – se mueve más rápido que la luz, nunca podremos verlo acercándose. Si pudiésemos ver un taquión sería sólo al alejarse. Ver un taquión sería similar a escuchar un reactor supersónico. Sólo *después* de que el *taquión* haya pasado cerca, asumiendo que sea visible a la luz del día, podríamos darnos cuenta de él. Primero veríamos un flash de luz, que corresponde al 'bang' de un avión rompiendo la barrera del sonido. Entonces veríamos *dos* imágenes del taquión, apareciendo en algún lugar del espacio y alejándose en sentidos opuestos, como puede deducirse de la Figura 114. Incluso si una de las imágenes estuviese aproximándose a nosotros, sería cada vez más pequeña y lejana. Este es, cuando menos, un comportamiento bastante inusual. Más aún, si quisieras

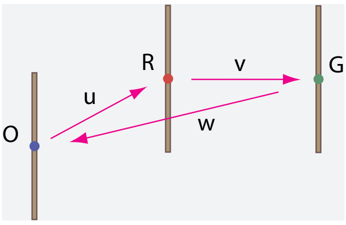

FIGURE 115 Si la vara de O es paralela a la de R y esta a su vez es paralela a la de G, entonces las varas de O y de G no son paralelas.

ver un taquión de noche, iluminándolo con una linterna, ¡tendrías que girar la cabeza en la dirección opuesta al brazo con la linterna! Este requerimiento también se deduce del diagrama espacio-tiempo: ¿ves cómo? Nadie ha visto nunca un fenómeno así. Los taquiones, si existen, son objetos muy extraños: ellos se acelerarían cuando pierden energía, un taquión sin energía sería el más rápido de todos, con una velocidad infinita. Por si esto fuera poco, la dirección del movimiento del taquión depende del movimiento del observador. Nunca se ha observado un objeto con estas propiedades. Peor aún, como acabamos de decir, los taquiones parecerían aparecer de la nada, desafiando las leyes de conservación; y como los taquiones no se pueden ver en el sentido usual de la palabra, no pueden tocarse tampoco, ya que ambos procesos se deben a interacciones electromagnéticas, como veremos más adelante en nuestro ascenso a la Montaña del Movimiento. Por tanto, los taquiones no pueden ser objetos en el sentido usual del término. En la segunda parte de nuestra aventura veremos que la teoría cuántica realmente *prohíbe* la existencia de taquiones (reales). Sin embargo, la teoría cuántica también necesita de la existencia de taquiones 'virtuales', como descubriremos.

Desafío 395 e
Ref. 190
Página 236

La paralela de la paralela no es paralela – rotación de Thomas

La relatividad tiene consecuencias realmente extrañas. Dos observadores cualesquiera pueden mantener una vara paralela a la del otro, incluso aunque ellos estén en movimiento relativo. Pero, extrañamente, en una cadena de varas en la que dos varas adyacentes sean siempre paralelas, la primera y la última varas *no* serán paralelas en general. En particular, *nunca* lo serán si el movimiento de los distintos observadores se produce en direcciones diferentes, como sucede cuando los vectores de velocidad forman un bucle.

El montaje más sencillo se muestra en la Figura 115. En la relatividad especial, una concatenación general de "boots" no da lugar a un "boost" puro, sino a un "boost" más una rotación. Como resultado, las varas situadas en los extremos de una cadena de varas paralelas normalmente no serán paralelas entre sí.

Ref. 191

Un ejemplo de este efecto aparece en el movimiento de rotación. Si andamos rápidamente en círculos sujetando una vara, manteniéndola siempre paralela a la dirección que acaba de tener, al finalizar el círculo la vara formará un cierto ángulo con respecto a su orientación original. De forma similar, el eje de rotación de un cuerpo que orbita alrededor de un segundo cuerpo *no* estará apuntando en la misma dirección tras una vuelta. Este efecto se llama *precesión de Thomas*, por Llewellyn Thomas, que lo descubrió en 1925, 20 años después del nacimiento de la relatividad especial. Había escapado a la atención de docenas de otros físicos famosos. La precesión de Thomas es importante para el funcionamiento interno de los átomos; volveremos sobre esto en una sección posterior de nuestra aventura. Estos sorprendentes fenómenos son puramente relativistas y, por tanto, *sólo* se pueden medir en el caso de velocidades comparables a la de la luz.

Una historia interminable – temperatura y relatividad

La bibliografía sobre la temperatura es confusa. Albert Einstein y Wolfgang Pauli estaban de acuerdo sobre el siguiente resultado: la temperatura T vista por un observador que se mueve con velocidad v se relaciona con la temperatura T_0 medida por un observador en reposo con respecto al baño térmico mediante

$$T = T_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\ . \tag{80}$$

Un observador en movimiento siempre mide valores menores que uno en reposo.

En 1908, Max Planck utilizó esta expresión, junto con la correspondiente transformación para el calor, para deducir que la entropía es invariante frente a las transformaciones de Lorentz. Al ser el descubridor de la constante de Boltzmann k, Planck probó de esta manera que la constante es un invariante relativista.

No todos los investigadores están de acuerdo con la expresión. Otros mantienen que T y T_0 deberían intercambiarse en la transformación de la temperatura. También se han
Ref. 192 propuesto otras potencias distintas de la sencilla raíz cuadrada de esta expresión. El origen de estas discrepancias es sencillo: la temperatura sólo está definida en situaciones de equilibrio, es decir, para baños térmicos. Pero un baño para un observador no lo es para otro. Para velocidades pequeñas, un observador en movimiento ve una situación que es *casi* un baño térmico; pero a velocidades mayores el asunto se vuelve complejo. La temperatura se deduce de la velocidad de las partículas materiales, tales como las moléculas y los átomos. Para un observador en movimiento, no hay una manera adecuada de medir la temperatura. La temperatura medida en un primer intento depende incluso ¡del intervalo de energías de las partículas materiales que se midan! En pocas palabras, el equilibrio térmico no es un concepto independiente del observador. Por tanto, no hay *ninguna* fórmula correcta para la transformación de la temperatura. (Con algunas suposiciones adicionales la expresión de Planck parece que es correcta.) De hecho, ni siquiera hay observaciones experimentales que pudieran utilizarse para validar las fórmulas propuestas. Realizar una medida así es un desafío para futuros experimentadores – pero no para la relatividad en sí misma.

Mecánica relativista

Dado que la velocidad de la luz es constante y que las velocidades no se suman, necesitamos replantearnos la definición de masa, momento y energía. Necesitamos, por tanto, reelaborar la mecánica desde el principio.

La masa en la retatividad

En la física galileana, la razón entre las masas de dos cuerpos se definió utilizando
Página 83 colisiones; venía dada por el inverso de la razón entre cambios de velocidad

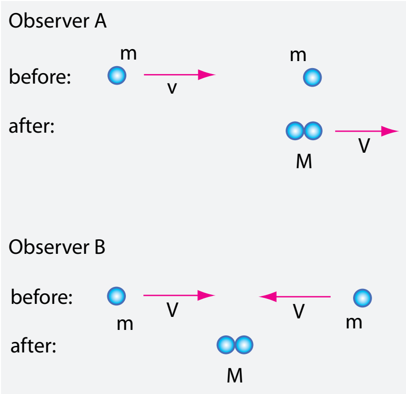

FIGURE 116 Una colisión inelástica vista desde dos sistemas de referencia inerciales distintos.

$$\frac{m_2}{m_1} = -\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} . \quad (81)$$

Sin embargo, los experimentos muestran que la expresión debe ser diferente para velocidades cercanas a la de la luz. De hecho, los experimentos no son necesarios: usando tan sólo el raciocinio se puede mostrar esto. ¿Puedes hacerlo tú? Desafío 396 ny

Sólo hay una solución a este problema. Los dos teoremas de conservación galileanos, $\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{const}$ para el momento y $\sum_i m_i = \text{const}$ para la masa, tienen que cambiarse a Ref. 193

$$\sum_i \gamma_i m_i \mathbf{v}_i = \text{const} \quad (82)$$

y

$$\sum_i \gamma_i m_i = \text{const} . \quad (83)$$

Estas expresiones, que se mantendrán válidas durante todo lo que nos queda de ascenso a la Montaña del Movimiento, implican, entre otras cosas, que la teletransportación *no* es posible en la naturaleza. (¿Podrías confirmar esto?) Para recuperar la física galileana, obviamente, los factores de corrección relativistas γ_i tienen que ser prácticamente iguales a 1 para velocidades cotidianas, es decir, para velocidades mucho menores que la de la luz. Desafío 397 s

Incluso si no supiéramos el valor del factor de corrección relativista, podemos deducirlo de la colisión mostrada en la Figura 116.

En el primer sistema de referencia (A) tenemos $\gamma_v m v = \gamma_V M V$ y $\gamma_v m + m = \gamma_V M$. De las observaciones desde el segundo sistema de referencia (B) deducimos que V compuesto con V da v, en otras palabras, que Desafío 398 e

$$v = \frac{2V}{1 + V^2/c^2} . \quad (84)$$

Cuando se combinan estas ecuaciones, se encuentra que la corrección relativista γ depende de la magnitud de la velocidad v mediante

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \tag{85}$$

Con esta expresión, y una generalización de la situación de la física galileana, la razón entre las masas de dos partículas que colisionan se define como la razón

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{\Delta(\gamma_2 v_2)}{\Delta(\gamma_1 v_1)} \,. \tag{86}$$

Página 86

(Aquí no damos la definición generalizada de masa mencionada en el capítulo sobre mecánica galileana, que se basa en los cocientes entre aceleraciones, que descubriremos pronto.) Los factores de corrección γ_i nos aseguran que la masa definida por esta ecuación sea la misma que la definida en la mecánica galileana, y que sea la misma para todos los tipos de colisión que pueda tener un cuerpo.* De este modo, la masa continúa siendo una magnitud que caracteriza la dificultad de acelerar un cuerpo y puede utilizarse también para *sistemas* de cuerpos.

Siguiendo el ejemplo de la física galileana, llamaremos a la magnitud

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v} \tag{87}$$

el *momento* (*lineal*) *relativista* (*tridimensional*) de una partícula. De nuevo, el momento total se *conserva* en un sistema que no esté sujeto a influencias externas, y esta conservación es una consecuencia directa de la manera en que la masa se ha definido.

Para velocidades bajas, o $\gamma \approx 1$, el momento relativista es el mismo que en la física galileana, y es proporcional a la velocidad. Pero para velocidades mayores, el momento aumenta más rápidamente que la velocidad, tendiendo a infinito cuando nos aproximamos a la velocidad de la luz.

Por qué el billar relativista es más difícil.

Hay una propiedad bien conocida de las colisiones entre una esfera o partícula en movimiento y una en reposo de *la misma* masa que es importante cuando se juega al billar. Tras una colisión así, las dos esferas se alejarán formando un *ángulo recto* entre ellas, como se muestra en la Figura 117.

Sin embargo, los experimentos muestran que la regla del ángulo recto *no* es válida para las colisiones relativistas. De hecho, utilizando la conservación del momento y un poco de destreza puedes calcular que

Desafío 400 e

$$\tan\theta \tan\varphi = \frac{2}{\gamma + 1} \,, \tag{88}$$

donde los ángulos están definidos en la Figura 118. De ahí obtenemos que la suma $\varphi + \theta$

Desafío 399 e

* Los resultados de más adelante también muestran que $\gamma = 1 + T/mc^2$, donde T es la energía cinética de la partícula.

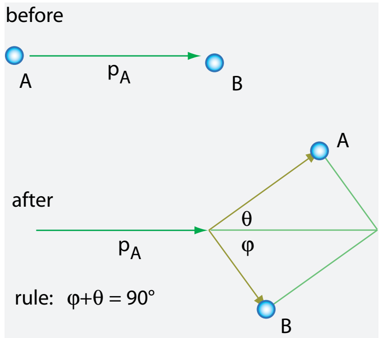

FIGURE 117 Una útil regla para jugar al billar no relativista.

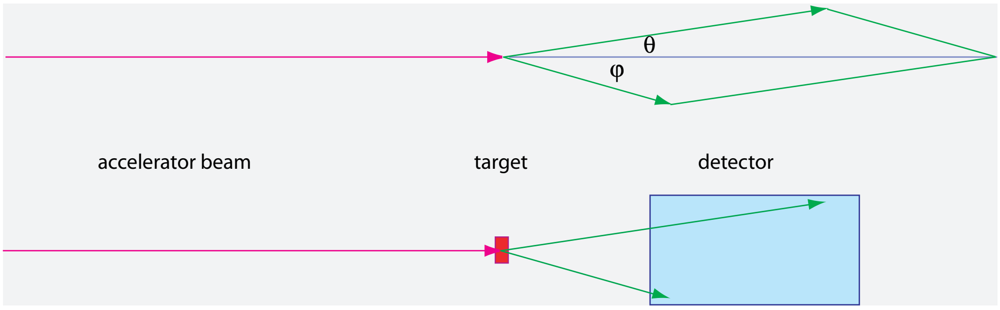

FIGURE 118 Las dimensiones de los detectores en los aceleradores de partículas se basan en la regla de ángulos del billar relativista.

es *menor* que un ángulo recto en el caso relativista. Las velocidades relativistas, por tanto, cambian completamente el juego del billar. De hecho, todos los físicos que trabajan con aceleradores de partículas saben esto: para electrones o protones, estos ángulos pueden deducirse fácilmente de las fotografías tomadas en las cámaras de niebla, que muestran los trazos dejados por las partículas cuando se mueven a través de ellas. Todas esas fotografías confirman la expresión de arriba. De hecho, las formas de los detectores se eligen de acuerdo a la expresión (88), como se esquematiza en la Figura 118. Si la fórmula – y la relatividad – estuviese equivocada, la mayoría de estos detectores no funcionarían, ya que dejarían sin detectar a la mayoría de las partículas tras la colisión. De hecho, estos experimentos también prueban la fórmula para la composición de velocidades. ¿Puedes confirmar esto?

Ref. 160

Desafío 401 ny

La masa es energía concentrada

Volvamos a la colisión inelástica y colineal de la Figura 116. ¿Cuál es la masa M del sistema final? Los cálculos muestran que

Desafío 402 s

$$M/m = \sqrt{2(1+\gamma_v)} > 2\,. \qquad (89)$$

En otras palabras, la masa del sistema final es *mayor* que la suma de las dos masas originales m. En contraste con la mecánica galileana, la suma de todas las masas de un sistema *no* es una magnitud conservada. Sólo la suma $\sum_i \gamma_i m_i$ de las masas corregidas lo es.

La relatividad proporciona una solución a este puzzle. Todo queda aclarado si la *energía E* de un objeto de masa m y velocidad v viene dada por la expresión

$$E = \gamma m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,, \tag{90}$$

tanto para el sistema total como para cada componente. La conservación de la masa corregida puede interpretarse entonces como la conservación de la energía, simplemente sin el factor c^2. En el ejemplo de dos masas idénticas que colisionan, las dos partículas están descritas por su masa y energía, y el sistema final tiene la energía E dada por la suma de las energías de los dos cuerpos. En particular, la energía E_0 de un cuerpo *en reposo* y con masa m es

$$E_0 = mc^2 \,, \tag{91}$$

que es quizá el más bello y famoso descubrimiento de la física moderna. Como c^2 es tan grande, podemos decir que *la masa es energía concentrada*. En otras palabras, la relatividad especial dice que toda masa tiene energía, y que toda forma de energía de un sistema tiene masa. Incrementar la energía de un sistema incrementa su masa, y reducir su energía reduce su masa. Si una bomba explota dentro de una caja cerrada, la masa, el peso y el momento de la caja es el mismo antes y después de la explosión, pero la masa combinada de todos los residuos de la explosión será *menor* que antes. Todas las bombas – no sólo las nucleares – toman su energía de su reducción de masa. Además, toda acción sobre un sistema – tal y como una caricia, una sonrisa o una mirada – toma su energía de una reducción de su masa.

La energía cinética T está dada por

$$T = \gamma m c^2 - mc^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m \frac{v^4}{c^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} m \frac{v^6}{c^4} + \ldots \tag{92}$$

Desafío 403 e

(utilizando el teorema del binomio) que se reduce al valor galileano sólo para velocidades pequeñas.

La equivalencia entre masa y energía $E = \gamma m c^2$ implica que tomar *cualquier* cantidad de energía de la materia resulta en una reducción de su masa. Cuando una persona toca el piano, piensa o corre, su masa disminuye. Cuando una taza de té se enfría o cuando una estrella brilla, su masa disminuye. La equivalencia entre masa y energía penetra en toda la naturaleza.

Por cierto, deberíamos distinguir cuidadosamente la transformación de *masa* en energía de la transformación de *materia* en energía. Lo segundo es mucho más raro. ¿Puedes dar algunos ejemplos?

Desafío 404 s

La relación entre masa y energía (90) implica la muerte de muchas fantasías de la ciencia-ficción. Implica que *no hay* fuentes de energía desconocidas en las proximidades de la Tierra. Si tales fuentes de energía existieran, podríamos medirlas a partir del efecto de+ su masa. Muchos experimentos han buscado, y continúan haciéndolo, tales efectos con un resultado negativo. No hay energía libre en la naturaleza.*

La relación entre masa y energía $m = E_0/c^2$ también implica que uno necesita alrededor de noventa mil millones de kilojulios (o ventiun mil millones de kilocalorias) para incrementar la masa en un único gramo. Por supuesto ¡los dietistas tendrán una opinión ligeramente diferente sobre este asunto! De hecho, los humanos toman cada día su energía del material que comen, beben y respiran reduciendo su masa combinada antes de expelerlos de nuevo. Sin embargo, este *defecto químico de masa* que aparece cuando se quema combustible no puede medirse aún pesando los materiales antes y después de la reacción: la diferencia es demasiado pequeña debido al factor de conversión tan grande que está implicado. De hecho, las energías involucradas en las reacciones químicas son del orden de 1 aJ (6 eV) por enlace; lo que nos da una diferencia de masa del orden de una parte en 10^{10}, demasiado pequeña para ser medida pesando gente o determinando diferencias de masa entre comida y excremento. Por tanto, para los procesos químicos del día a día la masa puede considerarse constante, en acuerdo con la física de Galileo.

La equivalencia entre masa y energía se ha confirmado por todos los experimentos realizados hasta ahora. La medida es sencilla para el *defecto de masa nuclear*. El experimento más preciso, de 2005, confirmó la relación entre masa y energía con más de seis dígitos significativos, al comparar la diferencia de masas de núcleos atómicos antes y después de capturar un neutrón por una parte, y la energía de los rayos gamma emitidos, por otra parte. Ref. 194

Los métodos modernos de medir la masa de moléculas individuales han hecho posible medir el defecto de masa *químico*, comparando la masa de una única molécula con la que tienen los átomos que la componen. El grupo de David Pritchard ha desarrollado lo que denominan *trampas de Penning*, que permiten determinar masas a partir de medidas de frecuencias; la precisión obtenible en estos experimentos de resonancia ciclotrón es suficiente como para confirmar que en los enlaces químicos $\Delta E_0 = \Delta mc^2$. En el futuro, la precisión cada vez mayor podrá permitir medir las energías de enlace de esta manera. Puesto que la energía de enlace es emitida a menudo como luz, podemos decir que estas técnicas modernas hacen posible *pesar la luz*.. Ref. 195

Pensar sobre la luz y su masa fue la base para la primera deducción de la relación de masa y energía de Einstein. Cuando un objeto emite dos haces de luz iguales en direcciones opuestas, su energía disminuye en la cantidad emitida. Puesto que los dos haces de luz son iguales en energía y momento, el cuerpo no se mueve. Si describimos la situación desde el punto de vista de un observado en movimiento, vemos de nuevo que la *energía en reposo* del objeto es Desafío 405 e

$$E_0 = mc^2 \,. \tag{93}$$

En resumen, todos los procesos físicos, incluyendo las colisiones, necesitan un tratamiento relativista siempre que la energía involucrada sea una fracción apreciable de la energía en reposo.

Todos los incrementos de energía producen un incremento de masa. Por tanto, calentar un cuerpo lo hace más pesado. Sin embargo, este efecto es tan débil que nadie

* Podría haber dos formas de energía extremadamente diluidas y aún no descubiertas, llamadas *materia oscura* y (pudiendo llevar a confusión) *energía oscura*, distribuidas por el universo. Se han deducido de medidas de masa bastante difíciles. El asunto aún no está resuelto definitivamente. Página 450

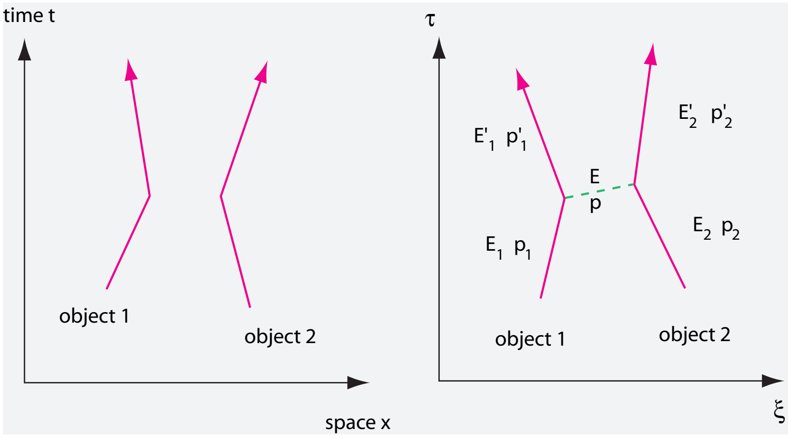

FIGURE 119 Diagrama espacio-tiempo de una colisión para dos observadores.

ha podido medirlo hasta el día de hoy. Es un desafío para los científicos experimentales llegar a hacerlo algún día.

¿Cómo se relacionan la energía y el momento? Las definiciones de momento (87) y energía (90) llevan a dos relaciones básicas. En primer lugar, sus magnitudes están rela-
Desafío 406 e cionadas por

$$m^2c^4 = E^2 - p^2c^2 \tag{94}$$

para todos los sistemas relativistas, sean objetos o – como veremos más abajo – radiación. Para el *vector* momento tenemos la otra relación importante

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2}\mathbf{v} , \tag{95}$$

que es igualmente válida para *cualquier* tipo de energía en movimiento, sea de un objeto
Desafío 407 e o de un pulso de radiación.* Usaremos ambas relaciones a menudo en lo que nos queda de ascenso a la Montaña Movimiento, incluyendo la siguiente discusión.

Colisiones, objetos virtuales y taquiones

Acabamos de ver que en las colisiones relativistas la conservación de la energía total y el momento es una consecuencia intrínseca de la definición de masa. Echemos ahora un vistazo a las colisiones con mayor detalle, utilizando estos nuevos conceptos. Una *colisión* es un proceso, es decir, una serie de eventos para los que

— el momento total antes de la interacción y tras la interacción es el mismo;
— el momento cambia en una pequeña región del espacio-tiempo;
— para velocidades pequeñas es válida la descripción galileana.

En la vida cotidiana, un *impacto*, es decir, una interacción de corta distancia, es el evento en el que ambos objetos cambian momento. Pero los dos objetos que colisionan están

* En la notación de tetravectores, podemos escribir que $v/c = \mathbf{P}/P_0$, donde $P_0 = E/c$.

localizados en puntos *diferentes* cuando esto ocurre. Una colisión, por tanto, se describe
Ref. 196 mediante un diagrama espacio-tiempo tal y como el de la izquierda de la Figura 119, que nos recuerda a la constelación de Orion. Es fácil comprobar que el proceso descrito por
Desafío 408 e un diagrama así es una colisión de acuerdo con la definición dada anteriormente.

La mitad derecha de la Figura 119 muestra el mismo proceso visto por otro sistema de referencia. El observador griego dice que el primer objeto ha cambiado su momento *antes* que el segundo. Esto significaría que ¡hay un corto intervalo de tiempo en el que *ni* el momento *ni* la energía se conservan!

La única manera de entender esta situación es asumiendo que hay un tercer objeto, dibujado con una línea puntuada. Busquemos las propiedades de ese objeto. Si damos subíndices numéricos a las masas, energías y momentos de los dos cuerpos, y les ponemos
Desafío 409 e una prima (′) tras la colisión, la masa desconocida m obedece

$$m^2c^4 = (E_1 - E_1')^2 - (p_1 - p_1')^2c^2 = 2m_1^2c^4 - 2E_1E_1'(\frac{1 - v_1v_1'}{c^2}) < 0 . \qquad (96)$$

Este es un resultado extraño, ya que implica que la masa desconocida ¡es un *número imaginario*!!* Además de todo esto, vemos directamente del segundo gráfico que el objeto intercambiado se mueve más rápido que la luz. Es un *taquión*, del griego ταχύς 'veloz'. En otras palabras, ¡las colisiones involucran movimiento más rápido que la luz! Veremos más tarde que las colisiones son, de hecho, los *únicos* procesos donde los taquiones juegan un papel en la naturaleza. Puesto que los objetos intercambiados aparecen sólo durante las colisiones, nunca por sí mismos, se llaman *objetos virtuales*, para distinguirlos de los usuales *objetos reales*, que pueden moverse libremente sin restricciones.** Estudiaremos sus propiedades más adelante, cuando discutamos la teoría cuántica.

En la naturaleza, un taquión es siempre un objeto virtual. Los objetos reales son siempre *bradiones* – del griego βραδύς 'lento' – u objetos que se mueven más despacio que la luz. Nótese que los taquiones, a pesar de su gran velocidad, no permiten transportar energía más rápido que la luz; y que no violan la causalidad si, y sólo si, son emitidos y
Desafío 410 ny absorbidos con la misma probabilidad. ¿Podrías confirmar esto?

Cuando estudiemos teoría cuántica, descubriremos que una interacción general de contacto entre objetos se describe no mediante el intercambio de unos *únicos* objetos virtuales, sino mediante un *flujo* continuo de partículas virtuales. En las colisiones normales del día a día, la interacción resulta ser electromagnética. En ese caso, las partículas intercambiadas son fotones virtuales. En otras palabras, cuando una mano toca a otra, cuando empuja una piedra, o cuando una montaña soporta los árboles sobre ella, se intercambian
Página 750 continuamente chorros de fotones virtuales.

* Es usual cambiar la relación entre masa y energía y la relación entre masa y momento de los taquiones a $E = \pm mc^2/\sqrt{v^2/c^2 - 1}$ y $p = \pm mv/\sqrt{v^2/c^2 - 1}$; esto lleva a una redefinición de m. Tras la redefinición, los taquiones tienen masas *reales*. Las relaciones entre energía y momento muestran que los taquiones pierden energía cuando ganan velocidad. (Una afirmación provocativa: un único taquión en una caja nos daría toda la energía que pudiésemos necesitar.) Ambos signos para la energía y el momento deben mantenerse, porque en caso contrario la equivalencia de todos los observadores inerciales no sería generada. Los taquiones no tienen ni energía ni momento mínimos.

** Con más precisión, una partícula virtual no obedece la relación $m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$, válida para partículas reales.

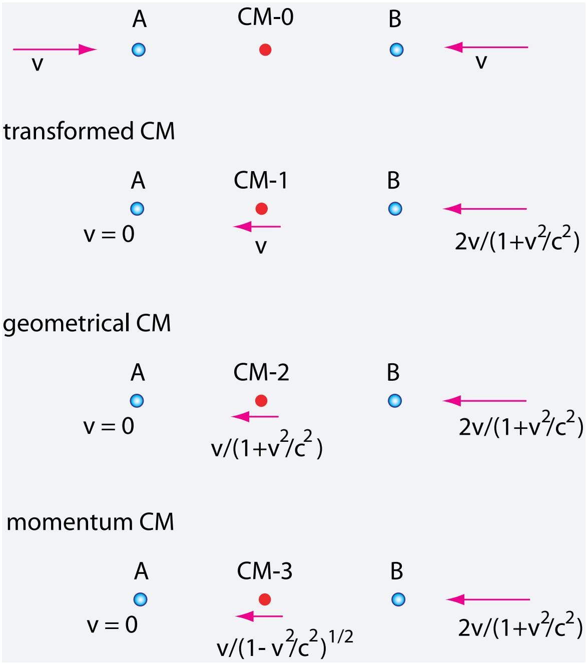

FIGURE 120 No hay manera de definir un centro de masas relativista.

Hay un secreto más escondido en las colisiones. En la parte de la derecha de la Figura 119, el taquión es emitido por el primer objeto y absorbido por el segundo. Sin embargo, es fácil imaginar un observador para el que ocurra lo contrario. Es decir, ¡el sentido en el que viaja el taquión depende del observador! De hecho esto es una pista de la existencia de la *antimateria*. En los diagramas espacio-tiempo la materia y la antimateria viajan en sentidos opuestos. La relación entre relatividad y antimateria será más evidente en la teoría cuántica.

Desafío 411 s

Página 778

Sistemas de partículas – no hay centro de masas

La relatividad también nos fuerza a eliminar el valioso concepto de *centro de masas*. Podemos ver esto ya en el caso más simple posible: aquel en el que dos objetos iguales chocan.

La Figura 120 muestra que desde el punto de vista en el que una de las dos partículas que colisionan está en reposo, hay al menos tres formas distintas de definir el centro de masas. En otras palabras, el centro de masas no es un concepto independiente del observador. Podemos deducir de la figura que el concepto sólo tiene sentido para aquellos sistemas cuyos componentes se muevan con velocidades relativas *pequeñas*. Para un sistema más general, el centro de masas no está definido de forma única. ¿Nos molesta esto en nuestro ascenso a la Montaña Movimiento? No. Estamos más interesados en el movimiento de partículas individuales que en objetos compuestos o sistemas.

Ref. 197

¿Por qué la mayoría de los movimientos son tan lentos?

Para la mayoría de los sistemas cotidianos, los intervalos de tiempo medidos por dos observadores diferentes son prácticamente iguales; sólo a grandes velocidades relativas, típicamente mayores que un tanto por ciento de la velocidad de la luz, hay diferencias significativas. La mayoría de tales situaciones son microscópicas. Ya hemos mencionado a los electrones dentro de un tubo de televisor o en un acelerador de partículas. Las partículas que componen la radiación cósmica son otro ejemplo: su alta energía ha producido muchas de las mutaciones que son la base de la evolución de animales y plantas de este planeta. Más tarde descubriremos que las partículas que aparecen en la radioactividad son también relativistas.

Pero, ¿por qué no observamos ningún cuerpo rápido *macroscópico*? Los cuerpos en movimiento, incluyendo a los observadores, con velocidades relativistas tienen unas propiedades que no se encuentran en la vida cotidiana: cuando se ven envueltos en una colisión, parte de su energía se convierte en nueva materia mediante $E = \gamma mc^2$. En la historia del universo esto ha ocurrido tantas veces que prácticamente todos los cuerpos que aún tienen velocidades relativistas son microscópicos.

Un segundo motivo por el que desaparece el movimiento relativo rápido es el amortiguamiento por radiación. ¿Imaginas que ocurre a las cargas eléctricas durante las colisiones, o en un baño de luz?

Desafío 412 s

En definitiva, casi toda la materia del universo se mueve con una velocidad relativa pequeña con respecto a otra materia. Los pocos contraejemplos conocidos, o son muy antiguos, como los chorros de los cuásar mencionados anteriormente, o se detienen tras un corto periodo de tiempo. Las enormes cantidades de energía necesarias para conseguir movimiento relativista de cuerpos macroscópicos aún se encuentran en explosiones de supernova, pero dejan de existir tras unas pocas semanas. El universo está lleno principalmente de movimiento lento porque es *viejo*. Determinaremos su edad en breve.

Página 457

La historia de la fórmula de equivalencia entre masa y energía de De Pretto y Einstein

A Albert Einstein le llevó varios meses tras la publicación de su primer artículo sobre relatividad especial deducir la expresión

$$E = \gamma mc^2 \tag{97}$$

que es llamada a menudo la fórmula más famosa de la Física. La publicó en un segundo artículo, al final de 1905. La fórmula pudo haberse descubierto perfectamente treinta años antes, de la teoría del electromagnetismo.

Ref. 149

De hecho, al menos una persona dedujo el resultado antes que Einstein. En 1903 y 1904, *antes* del primer artículo de Einstein sobre relatividad, un ingeniero italiano poco conocido, Olinto De Pretto, fue el primero en calcular, discutir y publicar la fórmula $E = mc^2$.* Es perfectamente posible que Einstein tomara la idea de la fórmula de De

* Umberto Bartocci, profesor de matemáticas de la Universidad de Perugia, en Italia, publicó los detalles de esta sorprendente historia en varios artículos. El relato completo se encuentra en su libro Umberto Bartocci, *Albert Einstein e Olinto De Pretto: la vera storia della formula piú famosa del mondo*, Ultreja, 1998.

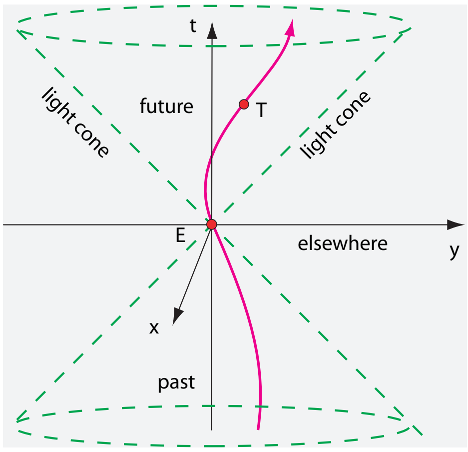

FIGURE 121 El diagrama espacio-tiempo de un objeto móvil T.

Pretto, posiblemente a través del amigo de Einstein Michele Besso u otro de los amigos italoparlantes que conoció cuando visitó a sus padres, o que estaban viviendo en Italia en ese tiempo. Por supuesto, el valor de los esfuerzos de Einstein no disminuye por esto.

De hecho, una fórmula similar había sido deducida también en 1904 por Friedrich Hasenöhrl y publicada en Annalen der Physik en 1905, antes que Einstein, aunque con un factor numérico incorrecto debido a un error de cálculo. La fórmula $E = mc^2$ también forma parte de varias expresiones en dos publicaciones de 1900 de Henri Poincaré. El auténtico héroe de esta historia podría ser Tolver Preston, que discutió la equivalencia entre masa y energía ya en 1875, en su libro *Physics of the Ether*. La equivalencia entre masa y energía estaba ya flotando en el aire, tan sólo esperando a ser descubierta.

Ref. 198

En los años 70 del siglo pasado ocurrió una historia similar: se descubrió una sencilla relación entre la aceleración gravitacional y la temperatura del vacío. El resultado había estado esperando ser descubierto más de 50 años. De hecho, se encontró un cierto número de resultados anteriores similares en las bibliotecas. ¿Podría haber otras relaciones sencillas ocultas en la física moderna esperando a ser descubiertas?

Desafío 413 s

Tetravectores

Para describir el movimiento de forma consistente para *todos* los observadores, tenemos que introducir algunas magnitudes nuevas. En primer lugar, el movimiento de las partículas se ve como una secuencia de eventos. Para describir los eventos con precisión, usamos coordenadas de eventos, también llamadas *tetracoordenadas*. Se escriben como

$$\mathbf{X} = (ct, \mathbf{x}) = (ct, x, y, z) = X^i \ . \tag{98}$$

De esta manera, un evento es un punto de el espacio-tiempo tetradimensional y es descrito por cuatro coordenadas. Las coordenadas son una temporal $X^0 = ct$, y tres espaciales, normalmente llamadas $X^1 = x$, $X^2 = y$ y $X^3 = z$. Podemos definir la *distancia* d entre dos eventos como la longitud de el vector diferencia. De hecho, normalmente se usa el cuadrado de la longitud, para evitar tantas raíces cuadradas. En la relatividad especial, la norma ('longitud al cuadrado') de un vector se define siempre mediante

$$\mathbf{XX} = {X_0}^2 - {X_1}^2 - {X_2}^2 - {X_3}^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2 = X_a X^a = \eta_{ab} X^a X^b = \eta^{ab} X_a X_b \ . \qquad (99)$$

En esta ecuación hemos introducido por primera vez dos notaciones que son útiles en relatividad. La primera consiste en sumar automáticamente sobre los índices repetidos. Así, $X_a X^a$ significa suma de todos los productos $X_a X^a$ con a corriendo sobre todos los índices. La segunda, para todo tetravector (o 4-vector) $\mathbf{X}$ distinguimos dos formas de escribir sus coordenadas, con superíndices y con subíndices. (En tres dimensiones sólo usamos subíndices.) Se relacionan mediante la siguiente relación general

$$X_a = \eta_{ab} X^b = (ct, -x, -y, -z) \ , \qquad (100)$$

donde hemos introducido la *métrica* η^{ab}, una abreviatura de la matriz*

$$\eta^{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \qquad (101)$$

¡Calma, eso es todo, no será más difícil! Volvamos ahora a la física.

El módulo de una posición o vector distancia, también llamado intervalo espaciotemporal, es, esencialmente, el tiempo propio multiplicado por c. El *tiempo propio* es el tiempo que muestra un reloj que se mueve en linea recta y con velocidad constante desde el punto inicial al final en el espacio-tiempo. La diferencia con respecto a los 3-vectores usuales es que el módulo del intervalo puede ser positivo, negativo o incluso cero. Por ejemplo, si los puntos inicial y final requieren un movimiento con la velocidad de la luz, Página 214 el tiempo propio es cero (esto es requerido por los vectores nulos). Si el movimiento es más lento que el de la luz, el tiempo propio al cuadrado es positivo y la distancia es tipo temporal. Para intervalos negativos y, por tanto, tiempos propios imaginarios, la distancia es tipo espacial.** La Figura 121 muestra un resumen simplificado.

Ahora ya estamos listos para calcular y medir el movimiento en cuatro dimensiones. Las medidas se basan en una idea central. No podemos definir la velocidad de una partícula como la derivada de sus coordenadas con respecto del tiempo, ya que las secuencias temporal y espacial dependen del observador. La solución consiste en definir todos los observables con respecto al *tiempo propio* τ, que se define como el tiempo mostrado por un reloj unido al objeto. En relatividad, el movimiento y el cambio están siempre medidos con respecto a relojes solidarios con el sistema móvil. En particular, la *velocidad relativista* o *tetravelocidad* $\mathbf{U}$ de un cuerpo es definida como el ritmo al que cambia sus

* El 30 % de todos los libros de texto de física utiliza el opuesto de η como métrica, la llamada *convención espacial* y, por tanto, tienen signos opuestos en su definición. En este texto, como en el 70 % de todos los textos de física, usamos la *convención temporal*.

** En el último caso, el opuesto del módulo, que es un número positivo, se llama *distancia propia* al cuadrado. La distancia propia es la longitud medida con un odómetro mientras el objeto se mueve.

tetracoordenadas $\mathbf{X} = (ct, \mathbf{x})$ con respecto al tiempo propio, es decir,

$$\mathbf{U} = \mathrm{d}\mathbf{X}/\mathrm{d}\tau \ . \tag{102}$$

Las coordenadas $\mathbf{X}$ se miden en el sistema de coordenadas definido por el observador inercial elegido. El valor de la velocidad $\mathbf{U}$ depende del observador o sistema de coordenadas elegido; por tanto la velocidad depende del observador a diferencia de lo que ocurre en la física galileana. Usando que $\mathrm{d}t = \gamma\, \mathrm{d}\tau$ y así

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{, donde} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \ , \tag{103}$$

obtenemos la relación con la velocidad usual $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t$:

$$u^0 = \gamma c \ , \ u^i = \gamma v_i \quad \text{o} \quad \mathbf{U} = (\gamma c, \gamma\mathbf{v}) \ . \tag{104}$$

Para velocidades pequeñas, tenemos $\gamma \approx 1$, y entonces las tres últimas componentes de la tetravelocidad son justamente las de la velocidad galileana. Para el módulo de la tetravelocidad $\mathbf{U}$ encontramos $\mathbf{UU} = U_a U^a = \eta_{ab} U^a U^b = c^2$, que es independiente del módulo de la velocidad trivector $\mathbf{v}$ y lo convierte en un vector tipo temporal, es decir, en un vector *dentro* del cono de luz.*

El módulo de un tetravector puede ser cero incluso aunque todas sus componentes sean distintas de cero. Un vector así se llama *nulo*. ¿Qué movimientos tienen vectores de
Desafío 415 s velocidad nulos?

De forma similar, la *aceleración relativista* o *tetraaceleración* $\mathbf{B}$ de un cuerpo se define como

$$\mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{U}/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}^2\mathbf{X}/\mathrm{d}\tau^2 \ . \tag{106}$$

Usando que $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}\tau = \gamma \mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t = \gamma^4 \mathbf{va}/c^2$, tenemos las siguientes relaciones entre las cuatro
Ref. 199 componentes de $\mathbf{B}$ y la aceleración trivector $\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$:

$$B^0 = \gamma^4 \frac{\mathbf{va}}{c} \quad , \quad B^i = \gamma^2 a_i + \gamma^4 \frac{(\mathbf{va}) v_i}{c^2} \ . \tag{107}$$

El módulo b de la tetraaceleración se encuentra fácilmente usando $\mathbf{BB} = \eta_{cd} B^c B^d =$

* En general, un tetravector se define como una magnitud (h_0, h_1, h_2, h_3), que se transforma como

$$\begin{aligned} h_0' &= \gamma_V (h_0 - h_1 V/c) \\ h_1' &= \gamma_V (h_1 - h_0 V/c) \\ h_2' &= h_2 \\ h_3' &= h_3 \end{aligned} \tag{105}$$

cuando cambiamos de un observador inercial a otro que se mueve con velocidad relativa V en la dirección x; las correspondientes generalizaciones para las otras coordenadas son evidentes. Esta relación nos permite deducir las leyes de transformación de cualquier trivector. ¿Podrías deducir la fórmula de composición de
Desafío 414 s velocidades (65) de esta definición, aplicándola a la tetravelocidad?

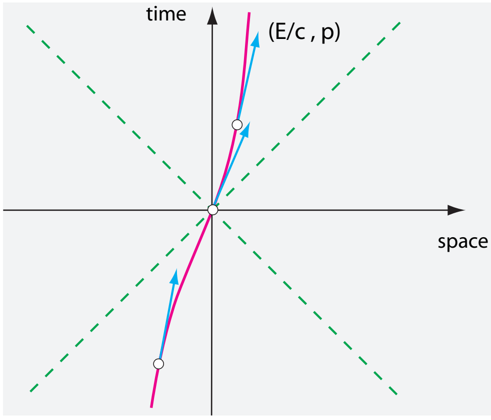

FIGURE 122 El tetravector energía-momento es tangente a la línea de universo.

$-\gamma^4(a^2 + \gamma^2(\mathbf{va})^2/c^2) = -\gamma^6(a^2 - (\mathbf{v}\times\mathbf{a})^2/c^2)$. Depende del valor de la aceleración **a**. El módulo de la tetraaceleración se conoce también como *aceleración propia* porque $\mathbf{B}^2 = -a^2$ si $v = 0$. (¿Cuál es la conexión entre la tetraaceleración y la aceleración para un observador que se mueve con la misma velocidad que el objeto?) Nótese que la tetraaceleración cae *fuera* del cono de luz, es decir, que es vector de tipo espacial, y que $\mathbf{BU} = \eta_{cd}B^cU^d = 0$, lo que significa que la tetraaceleración siempre es perpendicular a la tetravelocidad.* También destacamos que las aceleraciones, a diferencia de las velocidades, no pueden llamarse relativistas: la diferencia entre b_i y a_i, o entre sus módulos, no depende del valor de a_i, sino sólo del valor de la velocidad v. En otras palabras, las aceleraciones sólo requieren un tratamiento relativista cuando las velocidades que aparecen son relativistas. Si las velocidades involucradas son pequeñas, incluso la mayor de las aceleraciones puede tratarse con los métodos galileanos.

Desafío 416 s

Cuando la aceleración **a** es paralela a la velocidad **v**, tenemos que $B = \gamma^3 a$; cuando **a** es perpendicular a **v**, como en un movimiento circular, tenemos que $B = \gamma^2 a$. Usaremos este resultado más abajo.

Página 251

Tetramomento

Para describir el movimiento, también necesitamos el concepto de momento El *tetramomento* se define como

$$\mathbf{P} = m\mathbf{U} \tag{110}$$

* De forma similar, el “*jerk*” *relativista* o “tetrajerk” **J** de un cuerpo se define como

$$\mathbf{J} = \mathrm{d}\mathbf{B}/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}^2\mathbf{U}/\mathrm{d}\tau^2 \ . \tag{108}$$

Desafío 417 e

De la relación con el “jerk” trivector $\mathbf{j} = \mathrm{d}\mathbf{a}/\mathrm{d}t$ obtenemos que

$$\mathbf{J} = (J^0, J^i) = \left(\frac{\gamma^5}{c}(\mathbf{jv} + a^2 + 4\gamma^2\frac{(\mathbf{va})^2}{c^2}) \ , \gamma^3 j_i + \frac{\gamma^5}{c^2}((\mathbf{jv})v_i + a^2 v_i + 4\gamma^2\frac{(\mathbf{va})^2 v_i}{c^2} + 3(\mathbf{va})a_i) \right) \tag{109}$$

Desafío 418 ny

lo que usaremos más adelante. Sorprendentemente, **J** no se anula cuando **j** se anula. ¿Por qué no?

y, por tanto, se relaciona con el momento trivector $\mathbf{p}$ mediante

$$\mathbf{P} = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = (E/c, \mathbf{p}) \ . \tag{111}$$

Por esta razón, el tetramomento también se denomina *tetravector energía-momento*. Podemos decir que *el tetramomento de un cuerpo viene dado por su masa multiplicada por su tetradesplazamiento por unidad de tiempo propio*. Esta es la definición más simple posible del momento y la energía. El concepto fue introducido por Max Planck en 1906. El tetravector energía-momento, también llamado *momenergía*, como la tetravelocidad, es *tangente* a la linea de universo de la partícula. Esta conexión, mostrada en la Figura 122, sigue directamente de la definición, ya que

$$(E/c, \mathbf{p}) = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = m(\gamma c, \gamma\mathbf{v}) = m(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau, \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}\tau) \ . \tag{112}$$

La longitud (al cuadrado) de la momenergía, $\mathbf{PP} = \eta_{ab}P^aP^b$, es, por definición, la misma para todos los observadores inerciales,

$$E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2 \ , \tag{113}$$

Ya hemos mencionado que las energías o situaciones se denominan *relativistas* cuando la energía cinética $T = E - E_0$ no es despreciable frente a la energía en reposo $E_0 = mc^2$. Una partícula cuya energía cinética es mucho mayor que su masa en reposo se denomina *ultrarelativista*. Las partículas en un acelerador o en los rayos cósmicos pertenecen a esta categoría. (¿Cuál es su relación energía-momento? Desafío 419 s

A diferencia de la mecánica galileana, la relatividad implica un cero absoluto para la energía. Uno no puede extraer más energía que mc^2 de un sistema de masa m. En particular, de esta forma se fija un valor cero para la energía potencial. En resumen, la relatividad nos muestra que la energía está acotada inferiormente.

Nótese que con el término 'masa' m siempre indicamos algo que a veces se llama *masa en reposo*. Este nombre deriva del mal hábito de muchos libros de ciencia-ficción y de secundaria de llamar al producto γm *masa relativista*. Los que trabajan en este campo generalmente (pero no unánimemente) rechazan este concepto, como hizo el propio Einstein, y también rechazan la expresión tantas veces oída de que la 'masa (relativista) aumenta con la velocidad'. La masa relativista y la energía serían entonces dos palabras para el mismo concepto: esta manera de hablar está al nivel de la prensa amarilla. Ref. 200

No toda la energía galileana contribuye a la masa. La energía potencial en un campo externo no lo hace. La relatividad nos fuerza a llevar un registro preciso de la energía. La 'energía potencial' en relatividad es una forma abreviada de 'reducción de la energía del campo externo'.

¿Puedes mostrar que para dos partículas con momentos P_1 y P_2, se tiene que $P_1P_2 = m_1E_2 = M_2E_1 = c^2\gamma v_{12}m_1m_2$, donde v_{12} es su velocidad relativa? Desafío 420 s

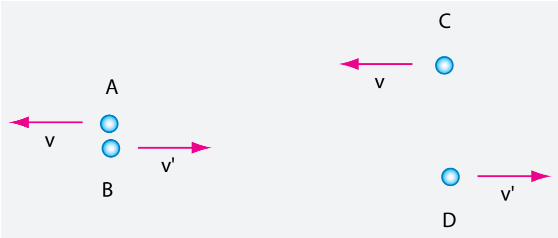

FIGURE 123 Sobre la definición de velocidad relativa.

Tetrafuerza

La tetrafuerza **K** se define como

$$\mathbf{K} = \mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}\tau = m\mathbf{B} \ . \tag{114}$$

Ref. 199, Ref. 201 Por tanto, la fuerza continúa siendo igual a la masa multiplicada por la aceleración en relatividad. De la definición de **K** deducimos la relación con la fuerza trivector $\mathbf{f} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = m\mathrm{d}(\gamma\mathbf{v})/\mathrm{d}t$, es decir*

$$\mathbf{K} = (K^0, K^i) = (\gamma^4 m\mathbf{va}/c, \gamma^2 m a_i + \gamma^4 v_i \frac{m\mathbf{va}}{c^2}) = (\frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}, \gamma\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}) = (\gamma\frac{\mathbf{fv}}{c}, \gamma\mathbf{f}) \ . \tag{115}$$

Desafío 422 e La tetrafuerza, como la tetraaceleración, es ortogonal a la tetravelocidad. El significado de la componente temporal de la tetrafuerza puede discernirse fácilmente: es la *potencia* necesaria para acelerar el objeto. Se tiene que $\mathbf{KU} = c^2\mathrm{d}m/\mathrm{d}\tau = \gamma^2(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t - \mathbf{fv})$: es el ritmo propio al que la energía interna de un sistema disminuye. El producto **KU** se hace cero tan sólo para fuerzas que conservan la masa en reposo. Las colisiones de partículas que llevan a reacciones no pertenecen a esta clase. En la vida cotidiana, la masa en reposo se conserva y, entonces, uno lleva a la expresión galileana $\mathbf{fv} = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$.

La rotación en la relatividad

Si una noche giramos alrededor de nuestro propio eje mientras miramos el cielo, las estrellas empiezan a moverse con velocidades mucho mayores que la de la luz. La mayoría de las estrellas son masas, no imágenes. Su velocidad debería estar limitada por la de la luz. ¿Cómo encaja esto con la relatividad especial?

Este ejemplo nos ayuda a aclarar de otra manera que es realmente la velocidad límite. Desde el punto de vista físico, un cielo en rotación *no* permite transporte de energía a velocidades superlumínicas y, por tanto, no contradice el concepto de velocidad límite. Desde el punto de vista matemático, la velocidad de la luz limita las velocidades relativas *sólo* cuando los objetos están *cerca* unos de otros, como se muestra en la mitad izquierda de la

* Algunos autores definen la fuerza trivector como $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}\tau$; entonces el aspecto de **K** es ligeramente diferente. En cualquier caso, es importante tener en cuenta que en relatividad la fuerza $\mathbf{f} = \mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t$ es proporcional a la aceleración **a**; sin embargo, fuerza y aceleración no son paralelas entre sí. De hecho, para fuerzas que
Desafío 421 s mantienen la masa en reposo se tiene que $\mathbf{f} = \gamma m\mathbf{a} + (\mathbf{fv})\mathbf{v}/c^2$. En relatividad, por el contrario, el momento *no* es proporcional a la velocidad, aunque sí paralela a ella.

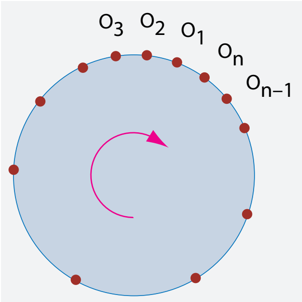

FIGURE 124 Observadores sobre un objeto en rotación

Figura 123. Sólo es posible comparar velocidades de objetos distantes si todas las velocidades involucradas son constantes en el tiempo; lo que no ocurre en el ejemplo presente. La versión diferencial de las transformaciones de Lorentz clarifica particularmente este punto. En muchos casos generales, las velocidades relativas de objetos *distantes* pueden ser Página 226 mayores que la de la luz. Encontramos un ejemplo anteriormente, cuando discutíamos Página 258 el caso de un coche dentro de un túnel, y encontraremos más ejemplos pronto.

Con estas aclaraciones, podemos considerar ahora brevemente la *rotación* en relatividad. La primera cuestión es cómo cambian el tiempo y las distancias en un sistema de referencia en rotación. Podrías querer comprobar que un observador en un sistema de referencia en rotación está de acuerdo con uno en un sistema que no rota en el radio de un cuerpo en rotación; sin embargo, ambos encuentran que el cuerpo en rotación, incluso aunque sea rígido, tiene una circunferencia *distinta* a la que tenía antes de que empezase a rotar. Hablando de forma poco rigurosa, el valor de π *cambia* para observadores en rotación. La razón entre la circunferencia c y el radio r resulta ser $c/r = 2\pi\gamma$: aumenta con Desafío 423 e la velocidad de rotación. Este resultado contrario a la intuición se denomina a menudo Ref. 202 *paradoja de Ehrenfest*. Entre otras cosas, muestra que el espacio-tiempo para un observador sobre un disco en rotación *no* es el espacio-tiempo de Minkowski de la relatividad especial.

Los cuerpos en rotación se comportan de manera extraña de varias maneras. Por ejemplo, se encuentran problemas cuando uno trata de sincronizar relojes montados sobre un disco en rotación, como muestra la Figura 124 Si uno inicia la sincronización del reloj en O_2 con el de O_1, y continúa así hasta el reloj O_n, encuentra que el último reloj *no* está sincronizado con el primero. Este resultado refleja el cambio en la circunferencia mencionado anteriormente. De hecho, un estudio cuidadoso muestra que las medidas de longitud y tiempo llevan a todos los observadores O_k a concluir que viven en un espacio-tiempo que rota. Los discos en rotación pueden usarse, por tanto, como una introducción a la relatividad general, donde la curvatura y sus efectos forman el tema central. En el próximo capítulo veremos más sobre esto.

¿Está limitada la velocidad angular? Si: La velocidad tangencial en un sistema de referencia inercial no puede superar la velocidad de la luz. El límite depende del *tamaño* del cuerpo en cuestión. Esto nos lleva a un nuevo acertijo: ¿se pueden *ver* los objetos que Desafío 424 ny rotan muy rápidamente?

El tetramomento angular se define de forma natural como

$$l^{ab} = x^a p^b - x^b p^a \ . \qquad (116)$$

En otras palabras, el tetramomento angular es un *tensor*, no un vector, como muestran
Desafío 425 ny sus dos índices. El momento angular se conserva en relatividad especial. El momento de inercia se define igualmente como el factor de proporcionalidad entre la velocidad angular y el momento angular

Obviamente, para una partícula en rotación, la energía rotacional es parte de su masa
Desafío 426 ny en reposo. Puedes calcular la fracción para la Tierra y el Sol. No es grande. Por cierto, ¿cómo determinarías si una partícula microscópica, demasiado pequeña para ser vista,
Desafío 427 ny está rotando?

En relatividad, la rotación y la traslación se combinan de manera extraña. Imagina un cilindro en rotación uniforme sobre su eje, visto desde un observador en reposo. Como ha revelado Max von Laue, el cilindro aparecerá *retorcido* a un observador que se mueva
Desafío 428 e a lo largo de su eje de rotación. ¿Puedes confirmar esto?

He aquí el último acertijo respecto a la rotación. La velocidad es relativa; esto significa
Desafío 429 ny que el valor medido depende del observador. ¿Es así también para la velocidad angular?

Movimiento ondulatorio

En física galileana, una onda se describe mediante un vector de onda y una frecuencia. En relatividad especial, ambos se combinan en un tetravector de onda, dado por

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{n}\right) , \qquad (117)$$

donde λ es la longitud de onda, ω la velocidad de onda, y $\mathbf{n}$ el versor de dirección. Supongamos que un observador con tetravelocidad $\mathbf{U}$ encuentra una onda $\mathbf{L}$ cuya frecuencia es
Desafío 430 ny ν. Entonces se cumple

$$\nu = \mathbf{LU} \qquad (118)$$

Interesantemente, la velocidad de onda ω se transforma de distinta manera que la velo-
Ref. 154 cidad de partícula excepto en el caso $\omega = c$. También la fórmula de aberración para el
Desafío 431 ny movimiento ondulatorio es distinto que para partículas, excepto en el caso $\omega = c$.

La acción de una partícula libre – ¿cómo se mueven las cosas?

Si queremos describir el movimiento relativista de una partícula libre en términos
Página ?? de un principio de extremos, necesitamos una definición de acción. Ya sabemos que la acción física es una medida del cambio que ocurre en un sistema. Para un partícula libre, el único cambio que se da es el paso del tiempo en su reloj propio. Por tanto, la acción de una partícula libre será proporcional al tiempo propio transcurrido. Para que la acción tenga las unidades usuales de energía multiplicada por tiempo (Js), un primer intento de

definición de la acción de una partícula libre sería

$$S = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, , \tag{119}$$

donde τ es el tiempo propio a lo largo de su trayectoria. Esta es realmente la expresión correcta. Implica la conservación de la energía (relativista) y del momento, ya que el cambio del tiempo propio es maximal para un movimiento en línea recta con velocidad constante.

Desafío 432 ny ¿Podrías confirmar esto?

De hecho, en la naturaleza, todas las partículas se mueven de tal forma que su tiempo propio es maximal. En otras palabras, de nuevo encontramos que la naturaleza cambia tan poco como sea posible. La naturaleza es como un viejo sabio: sus movimientos son tan lentos como sea posible. Otra forma de verlo: todo cambio es efectivo al máximo. Como se mencionó anteriormente, Bertrand Russell llamó a esto la *ley de la vagancia cósmica*.

La expresión (119) para la acción se debe a Max Planck. En 1906, al explorarla en detalle, encontró que el cuanto de acción $\hbar$, que ya había descubierto junto con la constante de Boltzmann ,es un invariante relativista (como la propia constante de Boltzmann k).

Desafío 433 ny ¿Imaginas cómo puedo hacer esta demostración?

La acción también se puede escribir de maneras más complejas y que resultan más amedrentadoras. Estas maneras equivalentes de escribirla son particularmente adecuadas para prepararnos para la relatividad general:

$$S = \int L \, dt = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\gamma} \, dt = -mc \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{u_a u^a} \, d\tau = -mc \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\eta^{ab} \frac{dx_a}{ds} \frac{dx_b}{ds}} \, ds \, , \tag{120}$$

donde s es alguna función arbitraria, monótonamente creciente, de τ, como la propia identidad $s = \tau$. Como suele hacerse, la *métrica* $\eta^{\alpha\beta}$ de la relatividad especial es

$$\eta^{ab} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{121}$$

Puedes confirmar fácilmente la expresión (120) para la acción deduciendo la ecuación

Desafío 434 ny del movimiento de la forma usual.

En definitiva, la naturaleza no tiene prisa: todos los objetos se mueven de tal forma que su propio reloj muestra el retraso *más grande* posible, comparado con cualquier otro movimiento alternativo.* Este principio general también es válido para partículas bajo la influencia de la gravedad, como veremos en la sección sobre relatividad general, y para partículas bajo la influencia de interacciones eléctricas y magnéticas. De hecho, es válida para todos los casos de movimiento (macroscópico) que se encuentran en la naturaleza. Por el momento, notemos simplemente que el tiempo propio más largo se consigue cuan-

* Si los neutrinos tuviesen masa nula, la acción (120) no sería aplicable para ellos. ¿Por qué? ¿Puedes encon-

Desafío 435 ny trar una forma alternativa para este caso (que admitimos que sólo tiene interés como ejercicio)?

do la deferencia entre las energías cinética y potencial es mínima. (¿Podrías confirmar esto?) Para el caso galileano, el tiempo propio más largo también implica la menor diferencia entre los dos tipos de energía. De esta forma recuperamos el principio de mínima acción en su formulación galileana.

Desafío 436 ny

Página ??

Anteriormente vimos que la acción mide los cambios que se dan en el sistema. La relatividad especial nos muestra que la naturaleza minimiza este cambio maximizando el tiempo propio. En la naturaleza, *el tiempo propio es siempre maximal*. En otras palabras, las cosas se mueven a lo largo de trayectorias de *envejecimiento máximo*. ¿Podrías explicar por qué el 'envejecimiento máximo' y la 'vagancia cósmica' son equivalentes?

Desafío 437 ny

De nuevo encontramos que la naturaleza hace lo contrario que una película de Hollywood: la naturaleza cambia del modo más económico posible. Dejamos el significado más profundo de este resultado para tu reflexión personal: ¡qué lo disfrutes!

Transformaciones conformales – ¿por qué la velocidad de la luz es constante?

La diferencia entre espacio y tiempo en la relatividad especial depende del observador. Por otra parte, todos los observadores inerciales están de acuerdo en la posición, forma y orientación del cono de luz en un punto. Por tanto, en la teoría de la relatividad, los conos de luz son los 'objetos' físicos básicos. Debido a la importancia de los conos de luz, podemos preguntar si los observadores inerciales son los únicos que observan los mismos conos de luz. Interesantemente, resulta que hay *otros* observadores para los que ocurre lo mismo.

La primera categoría de tales observadores corresponde a aquellos que usan unidades de medida en las que los intervalos temporales y espaciales están multiplicados por un *factor de escala* λ. Las transformaciones a lo largo de estos puntos de vista vienen dadas por

$$x_a \mapsto \lambda x_a \qquad (122)$$

y se llaman *dilataciones*.

Una segunda categoría de observadores adicionales se encuentra aplicando las llamadas *transformaciones conformales especiales*. Se componen de una *inversión*

$$x_a \mapsto \frac{x_a}{x^2} \qquad (123)$$

junto con una *translación* por un vector b_a, es decir

$$x_a \mapsto x_a + b_a \;, \qquad (124)$$

y una segunda inversión. Por tanto las transformaciones conformales especiales son

$$x_a \mapsto \frac{x_a + b_a x^2}{1 + 2b_a x^a + b^2 x^2} \quad \text{o} \quad \frac{x_a}{x^2} \mapsto \frac{x_a}{x^2} + b_a \;. \qquad (125)$$

Estas transformaciones se llaman *conformales* porque no cambian los ángulos de las formas (infinitesimalmente) pequeñas, como puedes comprobar. Dejan, por tanto, la *forma*

Desafío 438 ny

(de objetos infinitesimalmente pequeños) sin cambiar. Por ejemplo, transforman circunferencias infinitesimales en circunferencias infinitesimales. Se denominan *especiales* porque el grupo conformal *completo* incluye también a las dilataciones y las transformaciones de Lorentz no homogéneas.*

Nótese que la manera en la que las transformaciones conformales especiales dejan los
Desafío 440 ny conos de luz invariantes es bastante sutil.

Puesto que las dilataciones no conmutan con las translaciones en el tiempo, no hay ninguna magnitud que se conserve asociada con esta simetría. (Lo mismo ocurre con los "boosts" de Lorentz) Por el contrario, las rotaciones y las translaciones espaciales sí conmutan con las translaciones temporales y por tanto dan lugar a magnitudes que se conservan.

Resumiendo, el vacío es conformalmente invariante – en el sentido especial que se acaba de mencionar – y por tanto también invariante frente a dilataciones. Esta es otra manera de decir que el vacío por sí sólo no es suficiente para definir las distancias, ya que no fija ningún factor de escala. Como sería esperable, se necesita a la materia para ello. De hecho, las transformaciones conformales (especiales) no son simetrías de situaciones que contienen materia. Tan sólo el vacío es conformalmente invariante; la naturaleza en su conjunto no lo es.

Sin embargo, la invariancia conformal, o la invariancia de los conos de luz, es suficiente para permitir mediciones de velocidad. Más aún, la invariancia conformal es *necesaria*
Desafío 441 ny para hacer medidas de velocidad, como puedes comprobar.

Hemos visto que la invariancia conformal implica la simetría de inversión: es decir,. que las escalas grandes y pequeñas del vacío están relacionadas. Esto nos sugiere que la constancia de la velocidad de la luz está relacionada con la existencia de la simetría de inversión. Esta misteriosa conexión nos da una pista sobre las aventuras que encontraremos en la tercera parte de nuestro ascenso a la Montaña Movimiento. La invariancia conformal resulta ser una propiedad importante que nos llevará a revelaciones increíbles.**

Desafío 439 ny * El conjunto de todas las transformaciones conformales *especiales* forma un grupo con cuatro parámetros; al añadir las dilataciones y las transformaciones de Lorentz no homogéneas se obtienen quince parámetros para el grupo conformal completo. El grupo conformal es localmente isomórfico a SU(2,2) y al grupo sim-
Página 1210 ple SO(4,2): estos conceptos se explican en el Appendix D. Nótese que todo esto es cierto sólo para *cuatro* dimensiones de espacio-tiempo; en *dos* dimensiones – el otro caso importante, especialmente en la teoría de cuerdas – el grupo conformal es isomórfico al grupo de transformaciones analíticas arbitrarias de coordenadas y, por tanto, tiene dimensión infinita.

** El grupo conformal no aparece sólo en la cinética de la relatividad especial: es el grupo de simetría de todas las interacciones físicas, como el electromagnetismo, siempre y cuando todas las partículas involucradas tengan masa nula, como es el caso del fotón. Un campo que tenga masa no es conformalmente invariante; por consiguiente la invariancia conformal no es una simetría exacta de toda la naturaleza. ¿Podrías confirmar
Desafío 442 ny que el término de masa $m\varphi^2$ de una lagrangiana no es conformalmente invariante?

Sin embargo, puesto que todas las partículas observadas hasta ahora tienen masa que son muchos órdenes de magnitud menores que la masa de Planck, se puede decir que prácticamente tienen masa nula; la simetría conformal se puede ver como una simetría *aproximada* de la naturaleza. Con este punto de vista, todas las partículas masivas se deberían ver como pequeñas correcciones, o perturbaciones, de un campo sin masa (y por tanto conformalmente invariante). Por tanto, para la construcción de una teoría fundamental, las lagrangianas que son invariantes conformalmente proporcionan una buena aproximación de partida.

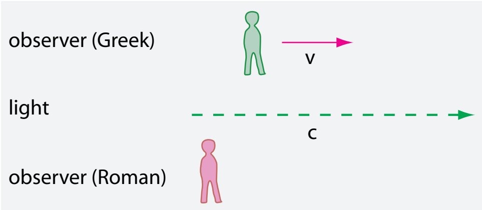

FIGURE 125 La situación más simple para un observador inercial y uno acelerado.

Observadores acelerados

Hasta ahora sólo hemos estudiado qué pueden decirse entre ellos los observadores inerciales cuando hablan sobre una misma observación. Por ejemplo, vimos que los relojes en movimiento siempre corren más despacio. La historia se vuelve más interesante aún cuando uno o ambos observadores están acelerando.

Algunas veces se oye que la relatividad especial no se puede usar para describir observadores acelerados. Eso es incorrecto, tanto como lo es decir que la física galileana no puede usarse para observadores acelerados. La única limitación de la relatividad especial es que no puede usarse en espacio-tiempos que no sean planos. Existen cuerpos acelerados en espacio-tiempos planos que, por tanto, se pueden estudiar dentro de la relatividad especial.

Como aperitivo, veamos que dice un observador acelerado, griego, sobre el reloj de uno inercial, romano, y viceversa. Asumamos que el observador griego, mostrado en la Figura 125, se mueve a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$, en coordenadas del observador inercial. En general, la razón entre los relojes romano y griego vendrá dada por $\Delta\tau/\Delta t = (\tau_2 - \tau_1)/(t_2 - t_1)$. Las coordenadas griegas aquí se construyen con un procedimiento sencillo: tomamos los dos conjuntos de eventos definidos por $t = t_1$ y $t = t_2$, y establecemos que τ_1 y τ_2 sean los puntos donde estos conjuntos intersectan con el eje temporal del observador griego.* Asumamos que el observador griego es inercial y se mueve con velocidad v visto por el observador romano. La razón entre los relojes estaría entonces dada por

Ref. 203

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{\gamma_v} , \qquad (126)$$

Desafío 443 ny

una fórmula a la que ahora estamos acostumbrados. De nuevo encontramos que los relojes en movimiento corren más despacio.

Para movimientos acelerados se necesita la versión diferencial del razonamiento anterior. La razón entre los relojes romano y griego es, de nuevo, $d\tau/dt$, y τ y $\tau + d\tau$ se calculan de la misma manera para los tiempos t y $t + dt$. Asumimos una vez más que el observador griego se mueve a lo largo de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$, medida por el observador romano. Encontramos directamente que

Ref. 203

$$\tau = t - \mathbf{x}(t)\mathbf{v}(t)/c^2 \qquad (127)$$

* Estos conjuntos forman los que los matemáticos llaman una *hipersuperficie*.

y, por tanto,

$$\tau + \mathrm{d}\tau = (t + \mathrm{d}t) - [\mathbf{x}(t) - \mathrm{d}t\mathbf{v}(t)][\mathbf{v}(t) + \mathrm{d}t\mathbf{a}(t)]/c^2 . \tag{128}$$

Estas ecuaciones juntas llevan a que

$$`\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t' = \gamma_v(1 - \mathbf{vv}/c^2 - \mathbf{xa}/c^2) . \tag{129}$$

Esto nos muestra que los relojes acelerados pueden correr más *rápido* o más lento, dependiendo de su posición $\mathbf{x}$ y del signo de us aceleración $\mathbf{a}$. Hemos puesto comillas en la ecuación de arriba porque podemos ver directamente que el observador griego nota

$$`\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau' = \gamma_v , \tag{130}$$

que *no* es la inversa de la ecuación (129). Esta diferencia resulta más evidente en el sencillo caso de dos relojes con la misma velocidad, uno con una aceleración constante g hacia el origen, mientras que el otro se mueve inercialmente. Entonces tenemos

$$`\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}t' = 1 + gx/c^2 \tag{131}$$

y

$$`\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau' = 1 . \tag{132}$$

Discutiremos esta situación en breve. Pero primero debemos aclarar el concepto de aceleración.

Aceleración para observadores inerciales

Las aceleraciones se comportan de manera distinta que las velocidades bajo cambios en el punto de vista. Veamos primero el caso sencillo en el que el objeto y dos observadores inerciales se mueven todos a lo largo del eje x. Si el observador inercial romano mide una aceleración $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$, y el observador griego, también inercial, mide una
Ref. 155 aceleración $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}^2\xi/\mathrm{d}\tau^2$, tenemos que

$$\gamma_v^3 a = \gamma_\omega^3 \alpha . \tag{133}$$

Esta relación nos muestra que las aceleraciones *no* son invariantes de Lorentz, a no ser que las velocidades involucradas sean todas pequeñas comparadas con la de la luz. Este resultado contrasta con nuestra experiencia cotidiana, donde las aceleraciones son independientes de la velocidad del observador.

La expresión (133) se simplifica si las aceleraciones se miden en instante de tiempo t en el que ω se anula – es decir, si se miden por el llamado observador inercial en *comovimiento*. En ese caso la aceleración viene dada por

$$a_\mathrm{c} = a\gamma_v^3 \tag{134}$$

y la aceleración $a_\mathrm{c} = \alpha$ se llama aceleración propia, ya que su valor describe lo que el observador griego, en comovimiento, *siente*: la aceleración propia describe la experiencia de ser empujado hacia atrás en el asiento de un coche que acelera.

En general, la velocidad del observador y la aceleración no son paralelas. Podemos calcular cómo se relaciona la aceleración (trivector) **a** medida por un observador inercial
Ref. 204
general con la aceleración $\mathbf{a}_c$ medida por uno en comovimiento, usando las expresiones (107) y (105). Obtenemos la generalización de (134):

$$\mathbf{v}\mathbf{a}_c = \mathbf{v}\mathbf{a}\gamma_v^3 \tag{135}$$

y

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\gamma_v^2}\left(\mathbf{a}_c - \frac{(1-\gamma_v)(\mathbf{v}\mathbf{a}_c)\mathbf{v}}{v^2} - \frac{\gamma_v(\mathbf{v}\mathbf{a}_c)\mathbf{v}}{c^2}\right) . \tag{136}$$

Al tomar cuadrados se llega a la relación

$$a^2 = \frac{1}{\gamma_v^4}\left(a_c^2 - \frac{(\mathbf{a}_c\mathbf{v})^2}{c^2}\right) \tag{137}$$

Página 241
que ya conocíamos de una manera ligeramente diferente. Nos muestra (de nuevo) que la aceleración (trivector) en comovimiento o propia es siempre mayor que la aceleración medida por una observador inercial externo. Cuando más rápido se mueve el observador
Desafío 444 e
externo, menor es la aceleración que observa. La aceleración no es un invariante relativista. La expresión también nos muestra que cuando la velocidad es perpendicular a la aceleración, un “boost” nos da un factor γ_v^2, mientras que cuando la velocidad y la aceleración son paralelas nos da el ya mencionado factor γ_v^3.

Vemos que la aceleración complica muchas situaciones y requiere un estudio más profundo. Para mantener las cosas relativamente sencillas, de ahora en adelante sólo consideraremos aceleraciones *constantes*. Resulta interesante que esta situación también nos
Página 484
sirva como una buena introducción a los agujeros negros y, como veremos pronto, al universo en su conjunto.

Sistemas de referencia acelerados

¿Cómo comprobamos si vivimos en un sistema de referencia inercial? Definamos primero el término. Un *sistema de referencia inercial* tiene dos propiedades que lo definen. Primera propiedad: las longitudes y distancias medidas con una regla se describen mediante la geometría de Euclides. En otras palabras, las reglas se comportan como lo hacen en la vida cotidiana. En particular, las distancias medidas contando cuántas reglas (varas) se tienen que tumbar una a continuación de la otra para, empezando en un punto, alcanzar el otro – las llamadas *distancias en varas* – se comportan como en la vida cotidiana. Por ejemplo, obedecen el teorema de Pitágoras en el caso de triángulos rectángulos. Segunda propiedad: la velocidad de la luz es constante. En otras palabras, dos observadores cualesquiera en ese sistema, independientemente de sus tiempos y posiciones, hacen la siguiente observación: el cociente c entre el doble de la distancia en varas entre dos puntos y el tiempo que necesita la luz para viajar de un punto al otro y volver, es siempre el mismo.

De forma equivalente, un sistema inercial es aquel en el que todos los relojes permanecen siempre sincronizados y en el que la geometría es euclídea. En particular, en un sistema inercial todos los observadores con coordenadas fijas permanecen siempre en reposo unos respecto a los otros. Esta última condición, sin embargo, es más general. Hay otras situaciones, no inerciales, donde también se satisface.

El sistema no inercial, o *sistema de referencia acelerado*, es un concepto útil en relatividad especial. De hecho, todos vivimos en un sistema así. Podemos usar la relatividad especial para describirlo de la misma manera que usamos la física galileana para describirlo al comienzo de nuestro viaje.

Un *sistema de referencia* en general es un conjunto continuo de observadores que permanecen en reposo unos con respecto a los otros. Aquí, 'en reposo con respecto a los otros' significa que el tiempo que necesita una señal luminosa para ir de un observador a otro y volver es constante en el tiempo o, de forma equivalente, que la distancia en varas entre los dos observadores es constante. Así, cualquier sistema de referencia puede llamarse también una colección *rígida* de observadores. Vemos por tanto que un sistema de referencia general *no* es lo mismo que un sistema de coordenadas, ya que lo segundo normalmente *no* es rígido. Si todos los observadores conectados de forma rígida tienen valores de coordenadas constantes, decimos que es un *sistema rígido de coordenadas*. Obviamente, estos son los más útiles cuando queremos describir sistemas de referencia acelerados.*

Ref. 206 Debemos notar que si dos observadores se mueven con una velocidad **v**, medida en algún sistema *inercial*, observan que están en reposo uno respecto del otro *sólo* si su velocidad es *constante* De nuevo, como anteriormente, dos personas atadas con una cuerda a una distancia tal que la cuerda esté tensa, verán que se rompe la cuerda (o cuelga destensada) cuando aceleran (o frenan) exactamente de la misma manera partiendo de una velocidad relativista. La aceleración relativista requiere pensar con cuidado. Desafío 445 ny

Un observador que siempre *sienta* la *misma* fuerza en su cuerpo se denomina *uniformemente* acelerado. Con más precisión, un observador uniformemente acelerado es un observador cuya aceleración en cada instante, medida desde un sistema de referencia inercial con respecto al cual el observador esté en reposo *en ese momento*, siempre tiene el mismo valor **B**. Es importante destacar que la aceleración uniforme *no* acelera de forma uniforme cuando se observa siempre desde el *mismo* sistema inercial. Se trata de una diferencia importante respecto al caso galileano.

Para tener movimiento uniformemente acelerado, en el sentido que se acaba de definir, necesitamos que

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = -g^2 \qquad (138)$$

Ref. 207 donde g es una constante independiente de t. El caso más simple es el movimiento uniformemente acelerado que es también *rectilíneo*, es decir, para el cual la aceleración **a** es paralela a **v** en un instante de tiempo y (por tanto) también en cualquier otro instante de

Ref. 205 * Sólo hay esencialmente dos tipos de sistemas de coordenadas rígidos, aparte de los sistemas inerciales:

— El sistema $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 (1 + g_k x_k / c^2)^2$ con una aceleración en el origen arbitraria pero constante. La aceleración es $\mathbf{a} = -\mathbf{g}(1 + \mathbf{g}x/c^2)$.
— El sistema en rotación uniforme $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\omega(-y\,dx + x\,dy)dt - (1 - r^2\omega^2/c^2)dt$. En este caso el eje z es el eje de rotación y $r^2 = x^2 + y^2$.

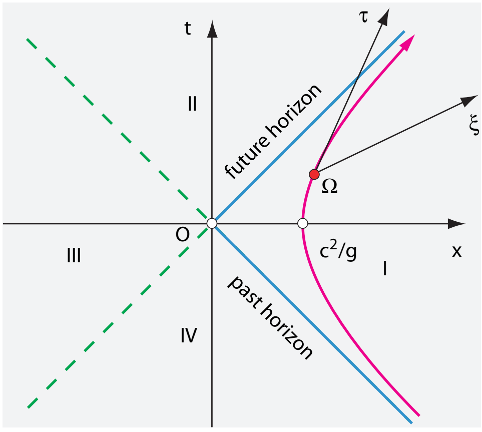

FIGURE 126 El movimiento hiperbólico de un observador Ω uniformemente acelerado y rectilíneo.

Desafío 446 ny tiempo. En ese caso podemos escribir, usando trivectores,

$$\gamma^3 \mathbf{a} = \mathbf{g} \quad \text{o} \quad \frac{\mathrm{d}\gamma \mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g} \,. \tag{139}$$

Haciendo que la dirección de la que hablamos sea el eje x, y resolviendo para $v(t)$, tenemos

$$v = \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}} \,, \tag{140}$$

donde hemos asumido que $v(0) = 0$. Notemos que a tiempos cortos tenemos $v = gt$ y a tiempos largos $v = c$, ambos resultados esperables. El momento del observador acelerado
Desafío 447 ny aumenta linealmente en el tiempo, de nuevo como era de esperar. Mediante una integración encontramos que el observador acelerado se mueve a lo largo de la trayectoria

$$x(t) = \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}} \,, \tag{141}$$

donde se ha elegido $x(0) = c^2/g$, para mantener la expresión sencilla. Debido a este resultado, visualizado en la Figura 126, un observador uniforme y rectilíneamente acelerado se dice que realiza un movimiento *hiperbólico*. Para tiempos cortos, la línea del universo se simplifica al usual $x = gt^2/2 + x_0$, mientras que para tiempos largos se tiene $x = ct$, como era de esperar. Por tanto el movimiento es uniformemente acelerado sólo para el cuerpo en sí, *no* para un observador externo.

El tiempo propio τ del observador acelerado se relaciona con el tiempo t del sistema inercial de la forma usual, $\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$. Usando la expresión para la velocidad $v(t)$ de la
Ref. 207, Ref. 208 ecuación (140), obtenemos*

$$t = \frac{c}{g} \sinh \frac{g\tau}{c} \quad \text{y} \quad x = \frac{c^2}{g} \cosh \frac{g\tau}{c} \tag{142}$$

para la relación entre el tiempo propio τ y el tiempo t y la posición x medidas por el observador inercial externo (romano). Encontraremos esta relación de nuevo en nuestro estudio de los agujeros negros.

¿Te suena esto algo aburrido? Simplemente imagina que vas en una motocicleta que acelera a $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ durante un tiempo propio τ de 25 años. ¡Eso te llevaría más allá del límite del universo conocido! ¿No merece la pena un intento? Desafortunadamente, no existen ni motocicletas ni misiles que puedan acelerar de esa manera, ya que sus tanques

Desafío 448 s de combustible serían gigantescos. ¿Podrías confirmar esto?

En la aceleración uniforme, las coordenadas se transforman según

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{c}{g} + \frac{\xi}{c}\right) \sinh \frac{g\tau}{c} \\ x &= \left(\frac{c^2}{g} + \xi\right) \cosh \frac{g\tau}{c} \\ y &= \upsilon \\ z &= \zeta \,, \end{aligned} \tag{143}$$

donde τ ahora es la coordenada temporal del sistema griego. Notemos que intervalo espacio-tiempo $\mathrm{d}\sigma$ satisface

$$\mathrm{d}\sigma^2 = (1 + g\xi/c^2)^2 c^2 \mathrm{d}\tau^2 - \mathrm{d}\xi^2 - \mathrm{d}\upsilon^2 - \mathrm{d}\zeta^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \,, \tag{144}$$

y puesto que $\mathrm{d}\tau = 0$, las distancias vienen dadas por el teorema de Pitágoras, el sistema

Ref. 210 griego es realmente rígido.

Tras este bosque de fórmulas, abordemos una cuestión sencilla, mostrada en la Figura 126. El observador romano, inercial, O ve al observador griego Ω alejarse con una aceleración g, siguiendo la ecuación (141). ¿Qué dirá el observador griego de su colega romano? Con todo lo que sabemos hasta ahora, es fácil responder. En cada punto de

Desafío 449 e su trayectoria Ω ve que O tiene la coordenada $\tau = 0$ (¿Podrías confirmar esto?), lo que significa que la distancia al observador romano, vista desde el griego, es la misma que el

Ref. 211 intervalo espacio-tiempo OΩ. Usando la expresión (141), vemos que éste es

$$d_{\mathrm{O}\Omega} = \sqrt{\xi^2} = \sqrt{x^2 - c^2 t^2} = c^2/g \,, \tag{145}$$

que, sorprendentemente, ¡es constante en el tiempo! En otras palabras, el observador griego verá que él siempre está a una distancia constante del observador romano, en flagrante contradicción con lo que dice el observador romano. Tómate tu tiempo para comprobar este extraño resultado de otra manera. Lo necesitaremos más adelante, para explicar por

Ref. 209 * Utiliza tu colección favorita de fórmulas – todo estudiante debería tener una – para deducir esto. El *seno hiperbólico* y el *coseno hiperbólico* se definen como $\sinh y = (\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})/2$ y $\cosh y = (\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y})/2$, respectivamente. Implican que $\int \mathrm{d}y/\sqrt{y^2 + a^2} = \operatorname{arsinh} y/a = \operatorname{Arsh} y/a = \ln(y + \sqrt{y^2 + a^2})$.

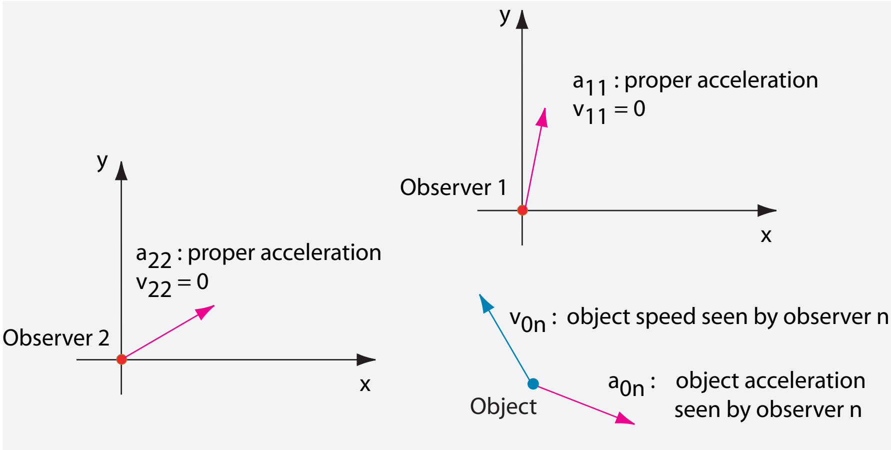

FIGURE 127 Las definiciones necesarias para deducir el comportamiento de la composición de aceleraciones.

qué la Tierra no explota. (¿Te puedes imaginar de que manera se relaciona esto con este resultado?)

Desafío 450 s

El *teorema de composición de aceleraciones* es es mucho más complejo que el de velocidades. La mejor explicación para esto la publicó Mishra. Si llamamos a_{nm} a la aceleración del sistema n vista por el observador m, estamos buscando la expresión de la aceleración del objeto a_{01} en función del valor a_{02} medido por el otro observador, la aceleración relativa a_{12}, y la aceleración propia a_{22} del otro observador: ver Figura 127. Aquí sólo estudiaremos las situaciones en una dimensión, donde todos los observadores y todos los objetos se mueven a lo largo del mismo eje. (Además, por claridad, escribiremos $v_{11} = v$ y $v_{02} = u$.) En la física galileana tenemos la conexión general

Ref. 212

Desafío 451 e

$$a_{01} = a_{02} - a_{12} + a_{22} \tag{146}$$

porque las aceleraciones se comportan de forma sencilla. En la relatividad especial, se obtiene

$$a_{01} = a_{02}\frac{(1-v^2/c^2)^{3/2}}{(1-uv/c^2)^3} - a_{12}\frac{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)^{-1/2}}{(1-uv/c^2)^2} + a_{22}\frac{(1-u^2/c^2)(1-v^2/c^2)^{3/2}}{(1-uv/c^2)^3} \tag{147}$$

como puede comprobar el lector.

Desafío 452 ny

Podrías dilucidar cómo entra el cociente entre aceleraciones en la definición de masa en la relatividad especial?

Página ??

Desafío 453 ny

Horizontes de eventos

Hay muchas propiedades sorprendentes del movimiento acelerado. Tiene especial interés la trayectoria, en las coordenadas ξ y τ del sistema rígido acelerado, de un objeto que se sitúa en $x = x_0 = c^2/g$ para cualquier tiempo t. Se obtienen las relaciones*

Desafío 454 ny

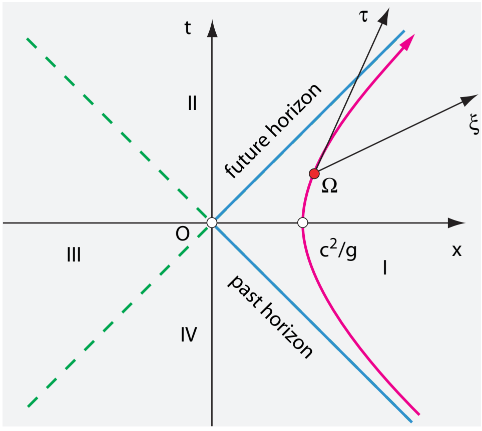

FIGURE 128 Movimiento hiperbólico y horizonte de eventos.

$$\xi = -\frac{c^2}{g}(1 - \operatorname{sech}\frac{g\tau}{c})$$

$$d\xi/d\tau = -c \operatorname{sech} \frac{g\tau}{c} \tanh \frac{g\tau}{c} \ . \qquad (149)$$

Estas ecuaciones son extrañas. A tiempos τ largos la coordenada ξ se acerca al valor límite $-c^2/g$ y $d\xi/d\tau$ tiende a cero. La situación es parecida a la de un coche que acelera alejándose de una mujer que está en el arcén de una recta de carretera muy larga. Vista desde el coche, la mujer se aleja; sin embargo, tras un rato, la única cosa que se nota es que ella se acerca lentamente al horizonte. En la física galileana, tanto el conductor del coche como la mujer del arcén ven que la otra persona se acerca al horizonte; en la relatividad especial, sólo el observador acelerado tiene está apreciación.

Un esquema de la situación ayuda a aclarar el concepto. En la Figura 128 vemos que la luz emitida por un evento en las regiones II y III no puede alcanzar al observador griego. Estos eventos están escondidos para él y no puede observarlos. Sin embargo, la luz procedente del observador griego *sí que puede* alcanzar la región II. La frontera entre la parte del espacio-tiempo que puede ser observada y la que no se llama *horizonte de eventos*. En relatividad, el horizonte de eventos actúa como una puerta de único sentido para la luz y otras señales. Para completar la descripción, el esquema también nos muestra el horizonte de eventos pasados. ¿Podrías confirmar que los horizontes de eventos son *negros*? Desafío 455 ny

Por tanto, no todos los eventos observados en un sistema de referencia inercial pueden observarse desde un sistema de referencia acelerado uniformemente. Los sistemas de referencia uniformemente acelerados producen horizontes de eventos a una distancia

* Las funciones que aparecen arriba, la *secante hiperbólica* y la *tangente hiperbólica*, se definen a partir de las expresiones de la nota al pie de la página 254:

$$\operatorname{sech} y = \frac{1}{\cosh y} \quad \text{y} \quad \tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y} \ . \qquad (148)$$

$-c^2/g$. Por ejemplo, una persona que está de pie no puede ver más allá que esa distancia por debajo de sus pies.

Por cierto, ¿es verdad que un haz de luz no puede alcanzar a un observador en movimiento hiperbólico si éste empieza con suficiente ventaja? Desafío 456 s

He aquí un desafío más complicado, que nos preparará para la relatividad general. ¿Cuál es la *forma* del horizonte visto por un observador uniformemente acelerado? Desafío 457 s

La aceleración cambia los colores

Ya vimos que un observador en movimiento ve colores distintos que el emisor. Hasta ahora hemos discutido este corrimiento de color, o efecto Doppler, sólo para movimiento inercial. Para sistemas acelerados la situación es incluso más extraña: el emisor y el receptor no se ponen de acuerdo en el color ni siquiera cuando ambos están en *reposo* uno con respecto del otro. De hecho, si la luz se emite en la dirección de la aceleración, la fórmula para el intervalo espacio-tiempo da Ref. 207, Ref. 213

$$d\sigma^2 = \left(1 + \frac{g_0 x}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 \qquad (150)$$

en donde g_0 es la aceleración propia de un observador situado en $x = 0$. Podemos deducir de forma directa que Desafío 458 ny

$$\frac{f_r}{f_s} = 1 - \frac{g_r h}{c^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{g_s h}{c^2}\right)} \qquad (151)$$

donde h es la distancia en varas entre la fuente y el receptor, y donde $g_s = g_0/(1+g_0 x_s/c^2)$ y $g_r = g_0/(1+g_0 x_r/c^2)$ son las aceleraciones propias medidas en la fuente y en el detector. En resumen, la frecuencia de la luz disminuye cuando la luz se mueve en el sentido de la aceleración. Por cierto, ¿tiene esto algún efecto en el color de los árboles a lo largo de su extensión vertical? Desafío 459 s

La fórmula que suele darse,

$$\frac{f_r}{f_s} = 1 - \frac{gh}{c^2} , \qquad (152)$$

sólo es correcta como primera aproximación. En sistemas de referencia acelerados tenemos que tener cuidado con el significado de todas las magnitudes. Para las aceleraciones cotidianas, sin embargo, la diferencia entre las dos fórmulas es despreciable. ¿Podrías confirmar esto? Desafío 460 ny

¿Se puede mover la luz más rápido que c?

¿Cuál es la velocidad de la luz medida por un observador acelerado? Usando la expresión (152), un observador acelerado deduciría que

$$v_{\text{light}} = c\,(1 + \frac{gh}{c^2}) \qquad (153)$$

que es mayor que c para la luz que se mueve delante o 'encima' de él, y menor que c para la que se mueve detrás o 'debajo' de él. Este extraño resultado es consecuencia de una propiedad básica de cualquier sistema de referencia acelerado. Incluso aunque todos los observadores estén en reposo unos respecto de los otros, los relojes *no* se mantienen sincronizados. Este cambio en la velocidad de la luz se ha confirmado también en los experimentos.* Por tanto, la velocidad de la luz sólo es constante cuando se define como $c = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, y si $\mathrm{d}x$ se mide con la regla situada en un punto *dentro* del intervalo $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}t$ con un reloj *durante* el intervalo $\mathrm{d}t$. Si la velocidad de la luz se define como $\Delta x/\Delta t$, o si la regla o el reloj están alejados de la luz, ¡la velocidad de la luz es distinta de c para observadores acelerados! Este es el mismo efecto que experimentas cuando giras alrededor de tu eje vertical durante la noche: la velocidad de las estrellas que observas es mucho mayor que la de la luz.

Obsérvese que este resultado no implica que las señales o la energía puedan moverse más rápido que c, como puedes comprobar por ti mismo. Desafío 461 s

De hecho, todos estos efectos son despreciables a distancias l mucho menores que c^2/a. Para una aceleración de $9{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ (más o menos la que tiene un árbol que cae), las distancias tendrían que ser del orden de un año-luz, o $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km, para que tuvieran un efecto apreciable. En resumen, *c es la velocidad de la luz relativa a la materia* cercana *tan sólo.*

Por cierto, la gravedad de todos los días es equivalente a una aceleración. Por tanto, ¿por qué los objetos distantes, como las estrellas, no se mueven más rápido que la luz, de acuerdo con la expresión (153)? Desafío 462 s

¿Qué es la velocidad de la luz?

Hemos visto que la velocidad de la luz, tal y como suele definirse, es c sólo si el observador es inercial o si mide la velocidad de una luz que pasa cerca de él (no de una luz que pasa a gran distancia). En resumen, la velocidad de la luz tiene que medirse localmente. Pero esta conclusión no elimina todas las sutilezas.

A menudo se olvida un punto adicional. Normalmente, la longitud se mide a partir del tiempo que necesita la luz para recorrer esa distancia. En tal caso la velocidad de la luz tiene que ser obviamente constante. Pero, ¿cómo comprobamos la constancia? Necesitamos eliminar las medidas de longitud. La manera más sencilla de hacer esto es reflejar la luz en un espejo, como se muestra en la Figura 129. La constancia de la velocidad de la luz implica que si la luz recorre hacia adelante y hacia detrás una linea recta, entonces los relojes de los extremos medirán tiempos dados por

$$t_3 - t_1 = 2\,(t_2 - t_1)\ . \tag{154}$$

Aquí hemos asumido que los relojes han sido sincronizados de acuerdo con el procedimiento descrito en la página 218. Si el factor no fuese exactamente dos, la velocidad de la luz no sería constante. De hecho, todos los experimentos realizados hasta ahora han dado un factor de dos, dentro de los márgenes de error experimentales.**

Página 419
* Los retardos en la propagación que se discutirán en el capítulo sobre relatividad general pueden considerarse una confirmación de este efecto.

** Las sutilezas de la velocidad de la luz en un camino y en dos caminos permanecerán como tema de

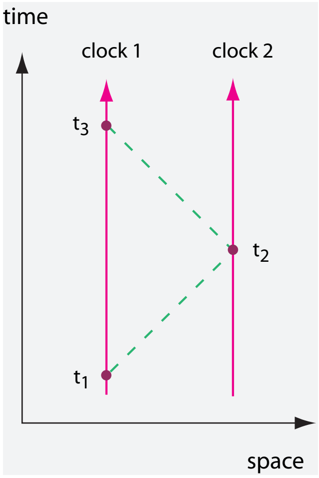

FIGURE 129 Los relojes y la medida de la velocidad de la luz como velocidad de doble camino.

Este resultado a veces se expresa diciendo que es imposible medir la velocidad de la luz en un único camino; sólo se puede medir la velocidad de la luz en doble camino. ¿Estás
Desafío 463 s de acuerdo?

Límites a la longitud de los cuerpos sólidos

Un objeto sólido cotidiano se rompe cuando alguna de sus partes se mueve con respecto a alguna otra de sus partes con una velocidad mayor que la del sonido c en ese material.* Por ejemplo, cuando un objeto golpea el suelo y su extremo frontal se detiene a una distancia d, el objeto se rompe si

$$\frac{v^2}{c^2} \geqslant \frac{2d}{l} . \qquad (155)$$

De esta manera, vemos que podemos evitar la rotura de objetos frágiles rodeándolos de espuma plástica – lo que incrementa la distancia de frenado – con más o menos el mismo grosor que el tamaño del objeto. ¡Esto explicaría porqué la caja que contiene un regalo normalmente es mucho más grande que el contenido!

El límite de fractura también puede escribirse de una manera distinta. Para evitar la rotura, la aceleración a de un cuerpo sólido con longitud l debe obedecer

$$l a < c^2 , \qquad (156)$$

discusión por largo tiempo. Muchos experimentos se explican y discuten en Ref. 160. Zhang dice en su resumen de la página 171, que la velocidad de la luz en un camino es independiente de la fuente de luz; sin embargo, ningún experimento muestra realmente que sea igual que la velocidad en doble camino. Más aún,
Ref. 214 la mayoría de los experimentos que se denominan 'de un camino' son, en realidad, experimentos de 'doble camino' (ver página 150, de Zhang).

* La velocidad del sonido (longitudinal) es alrededor de 5,9 km/s para vidrio, hierro o acero; alrededor de 4,5 km/s para el oro; y alrededor de 2 km/s para el plomo. Otros valores de velocidad del sonido se dan en la página ??.

donde c es la velocidad del sonido, que es la velocidad límite para las partes materiales de los sólidos. Repitamos este argumento en relatividad, usando la velocidad de la luz en lugar de la del sonido. Imaginemos que aceleramos un extremo de un cuerpo *sólido* con una aceleración *propia* a. El otro extremo no se puede mover con una aceleración α ilimitada o, equivalentemente, no se puede mover a una velocidad mayor que la de la luz. Una comprobación rápida nos muestra que la longitud l de un cuerpo sólido debe obedecer

Ref. 215
Desafío 464 s

$$l\alpha < c^2/2\ , \tag{157}$$

donde c es ahora la velocidad de la luz. La velocidad de la luz por tanto limita el tamaño de los cuerpos sólidos. Por ejemplo, para 9,8 m/s^2, la aceleración de una buena motocicleta, esta expresión da un límite de 9,2 Pm, alrededor de un año-luz. No se puede decir que sea una restricción muy grande: la mayoría de las motos son mucho menores.

Sin embargo, hay otras situaciones más interesantes. Las aceleraciones más grandes que se consiguen hoy en día se producen en los aceleradores de partículas. Los núcleos atómicos tienen un tamaño de unos pocos femtómetros. ¿Puedes deducir a qué energía se rompen cuando chocan en un acelerador? De hecho, los nucleones dentro del núcleo se mueven con aceleraciones del orden de $v^2/r \approx \hbar^2/m^2r^3 \approx 10^{31}$ m/s^2; uno de los valores más altos que se encuentran en la naturaleza.

Desafío 465 ny

Obsérvese que la física galileana llega a una conclusión parecida: una velocidad límite, sea la del sonido o la de la luz, imposibilita que los cuerpos sólidos sean *rígidos*. Cuando tiramos de un extremo de un cuerpo, el otro extremo siembre se empieza a mover un poco más tarde.

Un acertijo: ¿implica la velocidad límite una 'relación de incertidumbre' relativista

$$\Delta l\ \Delta a \leqslant c^2 \tag{158}$$

para las incertidumbres de la longitud y la aceleración?

Página 1089

¿Qué implica todo esto para el tamaño de las partículas elementales? Consideremos dos electrones separados una distancia d, y sea su tamaño l. La aceleración debida a la repulsión electrostática que les lleva a su límite de rotura viene dada por

Desafío 466 ny

$$l < \frac{4\pi\varepsilon_0 c^2 d^2 m}{e^2}\ . \tag{159}$$

Cuanto más cerca están los electrones, más pequeños deben ser. El límite experimental actual da un tamaño menor que 10^{-19} m. ¿Podrían los electrones ser exactamente puntuales? Volveremos más adelante sobre esta cuestión, durante el estudio de la relatividad general y la teoría cuántica.

La relatividad especial en cuatro frases

Esta sección de nuestro ascenso a la Montaña Movimiento se puede resumir rápidamente.

— Todos los observadores (que flotan libremente) encuentran que hay una única velocidad perfecta en la naturaleza, que es la velocidad máxima de trasporte de energía, a la

que viaja la radiación sin masa, como la luz o las señales de radio, pero que no pueden alcanzar los sistemas materiales.
— Por tanto, aunque el espacio-tiempo es el mismo para todo observador, las longitudes y los tiempos varían de un observador a otro en la forma que describen las transformaciones de Lorentz (69) y (70), que han sido confirmadas por los experimentos.
— Las colisiones nos muestran que una velocidad máxima implica que la masa es energía concentrada, y que la energía total de un cuerpo viene dada por $E = \gamma mc^2$, lo que de nuevo confirman los experimentos.
— Aplicados a objetos acelerados, estos resultados llevan a numerosas consecuencias contrarias a la intuición, como la paradoja de los gemelos, la aparición de horizontes de eventos y la a aparición de taquiones de vida breve en las colisiones.

La relatividad especial nos muestra que el movimiento, aunque limitado en velocidad, es relativo, se define utilizando la propagación de la luz, se conserva, y es reversible y determinista.

¿Puede variar la velocidad de la luz?

La velocidad de la luz sin masa es la velocidad límite. Si asumimos que toda la luz es luz sin masa, ¿podría aún así cambiar la velocidad de la luz de un lugar a otro, o conforme transcurre el tiempo? Esta delicada cuestión aún deja embobados a muchos físicos. La primera respuesta normalmente es un claro: '¡sí, por supuesto! Tan sólo mira lo que ocurre cuando el valor de c cambia en las fórmulas.' (De hecho, hay incluso intentos de construir 'teorías de la velocidad de la luz variable'.) Sin embargo, esta afirmación oída tan a menudo es falsa.

Puesto que la velocidad de la luz entra en nuestra definición de tiempo y espacio, también entra, aunque no nos demos cuenta, en la construcción de todas las reglas, todos los patrones de medida y todos los instrumentos de medida. Por tanto no hay ninguna manera de detectar si su valor cambia. Ningún experimento imaginable podría detectar una variación de la velocidad límite, ya que esa velocidad límite es la vase de todas las
Desafío 467 s medidas. '¡Eso es una crueldad intelectual!', podrías decir. 'Todos los experimentos muestran que la velocidad de la luz es invariante; nos hemos tenido que tragar un resultado contraintuitivo tras otro para aceptar la constancia de la velocidad de la luz, ¿y ahora se supone que tenemos que admitir que no hay otra elección posible?' Así es. Esta es la ironía del progreso de la física. La invariabilidad respecto al observador de la velocidad de la luz es contraria a la intuición y desconcertante cuando la comparamos la variabilidad respecto al observador de las velocidades cotidianas, las de galileo. Pero si hubiésemos tenido en cuenta que todas las medidas son – lo queramos o no – una comparación con la velocidad de la luz, no nos habríamos sorprendido por la constancia de la velocidad de la luz; más aún, nos habríamos sorprendido por las extrañas propiedades que tienen las velocidades *pequeñas*.

En pocas palabras, no hay en principio ninguna manera de comprobar la invariabilidad de un patrón. Dicho de otra manera, el aspecto realmente sorprendente de la relatividad no es la invariabilidad de c; es la desaparición de c de las fórmulas del movimiento del día a día.

¿Qué ocurre cerca de la velocidad de la luz?

Conforme uno se acerca a la velocidad de la luz, las magnitudes en las transformaciones de Lorentz divergen. La división por cero es imposible: de hecho, ni las masas ni los observadores se pueden mover a la velocidad de la luz. Sin embargo, esta es sólo la mitad de la historia.

Ningún observable diverge realmente en la naturaleza. Si acercarse a la velocidad de la luz tanto como queramos fuese posible, la relatividad especial fallaría. Cuando la contracción de Lorentz es extremadamente grande, no hay manera de ignorar la curvatura del espacio-tiempo; de hecho, la gravedad tiene que tenerse en cuenta en esos casos. Cerca de un horizonte no hay manera de ignorar las fluctuaciones de la velocidad y la posición; la teoría cuántica tiene que tenerse en cuenta para estos casos. La exploración de estas dos limitaciones definen las siguientes dos etapas de nuestro ascenso a la Montaña Movimiento.

Cuando empezamos nuestra aventura, durante nuestra exploración de la física galileana, una vez que habíamos definido los conceptos básicos de velocidad, espacio y tiempo, fijamos nuestra atención en la gravedad. La invariabilidad de la velocidad de la luz nos ha forzado a cambiar estos conceptos básicos. Volvamos ahora al estudio de la gravedad a la luz de esta invariabilidad.

Bibliografía

139 Aristóteles, Sobre los sentidos y lo sensible, sección 1, parte 1, 350 bce. Citado en Jean-Paul Dumont, *Les écoles présocratiques*, Folio Essais, Gallimard, p. 157, 1991. Citado en la página 192.

140 La historia de la medida de la velocidad de la luz se puede encontrar en el capítulo 19 del texto de Francis A. Jenkins & Harvey E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill, New York, 1957. Citado en la página 193.

141 Sobre la manera de realizar tales medidas, ver Sydney G. Brewer, *Do-it-yourself Astronomy*, Edinburgh University Press, 1988. El propio Kepler nunca midió las distancias de los planetas al Sol, tan sólo los *cocientes* de distancias planetarias. El paralaje del Sol desde dos puntos de la Tierra es casi 8,79 ″; se midió por primera vez en el siglo dieciocho. Citado en la página 194.

142 Aristarcos, Sobre el tamaño y la distancia del Sol y la Luna, *c.* 280 bce, en Michael J. Crowe, *Theories of the World From Antiquity to the Copernican Revolution*, Dover, 1990. Citado en la página 194.

143 J. Frercks, Creativity and technology in experimentation: Fizeau's terrestrial determination of the speed of light, *Centaurus* **42**, pp. 249–287, 2000. Véase también la bella página web sobre reconstrucción de experimentos científicos históricos en http://www.uni-oldenburg.de/histodid/forschung/nachbauten. Citado en la página 194.

144 La forma de tomar imágenes de pulsos de luz con una cámara fotográfica normal, sin electrónica, se describe en M. A. Duguay & A. T. Mattick, Ultrahigh speed photography of picosecond light pulses and echoes, *Applied Optics* **10**, pp. 2162–2170, 1971. La imagen de la página 195 está tomada de allí. Citado en la página 194.

145 Puedes aprender las bases de la relatividad especial con la ayuda de la web, sin consultar ningún libro, usando la dirección http://physics.syr.edu/research/relativity/RELATIVITY.html como punto de partida. Esta página menciona la mayoría de los recursos disponibles en la web en idioma inglés. Se pueden encontrar enlaces en otros idiomas usando motores de búsqueda. Citado en la página 196.

146 Las observaciones de explosiones de rayos gamma muestran que la velocidad de la luz no depende de la velocidad del emisor en una parte entre 10^{20}, como muestra K. Brecher, *Bulletin of the American Physical Society* **45**, 2000. Él asume que las dos caras del astro emiten luz. La gran diferencia de velocidades y lo estrecho del pulso lleva a este resultado. Consúltese también el artículo anterior K. Brecher, Is the speed of light independent of the source?, *Physics Letters* **39**, pp. 1051–1054, Errata 1236, 1977. Medir la velocidad de la luz de estrellas que se mueven rápidamente es otra manera. Algunos de estos experimentos no son totalmente seguros. Hay una teoría de electrodinámica que compite con la relatividad, debida a Ritz, que mantiene que la velocidad de la luz es c sólo cuando se mide con respecto a la fuente; la luz de las estrellas, sin embargo, pasa a través de la atmósfera y su velocidad podría reducirse a c.

El famoso experimento con luz emitida por piones rápidos en el CERN no puede ser sujeto a esta crítica. Se describe en T. Alväger, J. M. Bailey, F. J. M. Farley, J. Kjellman & I. Wallin, Test of the second postulate of relativity in the GeV region, *Physics Letters* **12**, pp. 260–262, 1964. Véase también T. Alväger & al., Velocity of high-energy gamma rays, *Arkiv för Fysik* **31**, pp. 145–157, 1965.

Otro experimento preciso a velocidades extremas se describe en G. R. Kalbfleisch, N. Baggett, E. C. Fowler & J. Alspector, Experimental comparison of neutrino, anti-neutrino, and muon velocities, *Physical Review Letters* 43, pp. 1361–1364, 1979. Citado en la página 197.

147 Véase por ejemplo C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Revised edition, Cambridge University Press, 1993. Citado en las páginas 197 and 198.

148 B. E. Schaefer, Severe limits on variations of the speed of light with frequency, *Physical Review Letters* 82, pp. 4964–4966, 21 June 1999. Citado en la página 197.

149 El nacimiento de la teoría moderna de la relatividad es el famoso artículo Albert Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* 17, pp. 891–921, 1905. Aún merece la pena leerlo, y todo físico debería hacerlo. Lo mismo puede decirse del famoso artículo, probablemente escrito tras oir la idea de Olinto De Pretto, Albert Einstein, Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?, *Annalen der Physik* 18, pp. 639–641, 1905. Véase también la revisión Albert Einstein, Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* 4, pp. 411–462, 1907. Estos artículos están ahora disponibles en muchos idiomas. Una revisión posterior, no publicada, está disponible en edición facsimile y con traducción al inglés Albert Einstein, Hanoch Gutfreund, ed., *Einstein's 1912 Manuscript on the Theory of Relativity*, George Braziller, 2004. Citado en las páginas 197, 199, and 238.

150 Albert Einstein, *Mein Weltbild*, editado por Carl Selig, Ullstein Verlag, 1998. Citado en la página 198.

151 Jean van Bladel, *Relativity and Engineering*, Springer, 1984. Citado en la página 198.

152 Albrecht Fölsing, *Albert Einstein – eine Biographie*, Suhrkamp p. 237, 1993. Citado en las páginas 198 and 208.

153 R. J. Kennedy & E. M. Thorndike, Experimental establishment of the relativity of time, *Physical Review* 42, pp. 400–418, 1932. Véase también H. E. Ives & G. R. Stilwell, An experimental study of the rate of a moving atomic clock, *Journal of the Optical Society of America* 28, pp. 215–226, 1938, and 31, pp. 369–374, 1941. Para versiones modernas, de alta precisión, véase C. Braxmeier, H. Müller, O. Pradl, J. Mlynek, A. Peters & S. Schiller, New tests of relativity using a cryogenic optical resonator, *Physical Review Letters* 88, p. 010401, 2002. Los últimos resultados están en P. Antonini, M. Okhapkin, E. Göklü & S. Schiller, Testing the constancy of the speed of light with rotating cryogenic optical resonators, *Physical Review A* 71, p. 050101, 2005, o http://arxiv.org/abs/gr-qc/0504109. Citado en la página 199.

154 Edwin F. Taylor & John A. Wheeler, *Spacetime Physics – Introduction to Special Relativity*, segunda edición, Freeman, 1992. See also Nick M. J. Woodhouse, *Special Relativity*, Springer, 2003. Citado en las páginas 199 and 246.

155 Wolfgang Rindler, *Relativity – Special, General and Cosmological*, Oxford University Press, 2001. Un hermoso libro por uno de los maestros del campo. Citado en las páginas 199 and 251.

156 El ralentamiento de la velocidad de la luz dentro de las estrellas se debe a la dispersión de fotones por la materia estelar. En la bibliografía se encuentran estimaciones para el tiempo de escape del Sol que varían entre 17 000 años y 50 millones de años. Citado en la página 199.

157 L. Vestergaard Hau, S. E. Harris, Z. Dutton & C. H. Behroozi, Light speed reduction to 17 meters per second in an ultracold atomic gas, *Nature* 397, pp. 594–598, 1999. Véase también Ref. 25. Citado en la página 199.

158 El método para explicar la relatividad especial dibujando unas pocas líneas en un papel se debe a Hermann Bondi, *Relativity and Common Sense: A New Approach to Einstein*, Dover, New York, 1980. Véase también DIERCK-EKKEHARD LIEBSCHER, *Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal*, Akademie-Verlag Berlin, 1991. Citado en la página 200.

159 ROD S. LAKES, Experimental limits on the photon mass and cosmic vector potential, *Physical Review Letters* **80**, pp. 1826–1829, 1998. La velocidad de la luz es independiente de la frecuencia dentro de un factor de $6 \cdot 10^{-21}$, como muestran los estudios de rayos gamma de B. E. SCHAEFER, Severe limits on variations of the speed of light with frequency, *Physical Review Letters* **82**, pp. 4964–4966, 1999. Citado en la página 202.

160 Se da un compendio de resultados experimentales en YUAN ZHONG ZHANG, *Special Relativity and its Experimental Foundations*, World Scientific, 1998. Citado en las páginas 202, 207, 218, 232, 260, and 267.

161 R. W. MCGOWAN & D. M. GILTNER, New measurement of the relativistic Doppler shift in neon, *Physical Review Letters* **70**, pp. 251–254, 1993. Citado en la página 203.

162 El record actual para la sincronización de relojes parece ser 1 ps para dos relojes separados por 3 km uno del otro. Véase A. VALENCIA, G. SCARCELLI & Y. SHIH, Distant clock synchronization using entangled photon pairs, *Applied Physics Letters* **85**, pp. 2655–2657, 2004, o http://arxiv.org/abs/quant-ph/0407204. Citado en la página 204.

163 J. FRENKEL & T. KONTOROWA, Über die Theorie der plastischen Verformung, *Physikalische Zeitschrift der Sowietunion* **13**, p. 1, 1938. F. C. FRANK, On the equations of motion of crystal dislocations, *Proceedings of the Physical Society A* **62**, pp. 131–134, 1949. J. ESHELBY, Uniformly moving dislocations, *Proceedings of the Physical Society A* **62**, pp. 307–314, 1949. Véase también G. LEIBFRIED & H. DIETZE, *Zeitschrift für Physik* **126**, p. 790, 1949. Se puede encontrar una introducción general en A. SEEGER & P. SCHILLER, Kinks in dislocation lines and their effects in internal friction in crystals, *Physical Acoustics* **3A**, W. P. MASON, ed., Academic Press, 1966. Véanse también los libros de texto FRANK R.N.ÑABARRO, *Theory of Crystal Dislocations*, Oxford University Press, 1967, o J. P. HIRTH & J. LOTHE, *Theory of Dislocations*, McGraw Hill, 1968. Citado en la página 205.

164 Este bello gráfico está tomado de Z.G.T. GUIRAGOSSIAN, G.B. ROTHBART, M.R. YEARIAN, R. GEARHART & J.J. MURRAY, Relative velocity measurements of electrons and gamma rays at 15 GeV, *Physical Review Letters* **34**, pp. 335–338, 1975. No citado.

165 Para encontrar más sobre los famosos crackpots, y sus ideas, envía un email a majordomo@zikzak.net con el texto 'subscribe psychoceramics'. Citado en la página 206.

166 La velocidad del neutrino es la misma que la de la luz con 9 dígitos decimales. Esto se explica en LEO STODOLSKY, The speed of light and the speed of neutrinos, *Physics Letters B* **201**, p. 353, 1988. Se ha publicado una observación de una pequeña masa para el neutrino en el experimento del Super-Kamiokande japonés descrito en Y. FUKUDA & al., Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos, *Physical Review Letters* **81**, pp. 1562–1567, 1998. Los resultados más recientes publicador por el Canadian Sudbury Neutrino Observatory, están en Q.R. AHMAD & al., Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory, *Physical Review Letters* **89**, p. 011301, 2002, y también confirman que los neutrinos tienen una masa no nula, en la región de 1 eV. Citado en las páginas 206 and 1276.

167 B. ROTHENSTEIN & G. ECKSTEIN, Lorentz transformations directly from the speed of light, *American Journal of Physics* **63**, p. 1150, 1995. Véase también los comentarios en E. KAPUŚCIK, Comment on "Lorentz transformations directly from the speed of light," by B. Rothenstein and G. Eckstein, *American Journal of Physics* **65**, p. 1210, 1997. Citado en la página 207.

168 Véanse, por ejemplo, las lecciones de Lorentz en 1922 en el Caltech, publicadas como H. A. Lorentz, *Problems of Modern Physics*, editado por H. Bateman, Ginn and Company, página 99, 1927. Citado en la página 208.

169 A. A. Michelson & E. W. Morley, On the relative motion of the Earth and the luminiferous ether, *American Journal of Science (3rd series)* **34**, pp. 333–345, 1887. Michelson publicó muchos otros artículos sobre el tema tras este. Citado en la página 208.

170 S. Stephan, P. Antonini & M. Okhapkin, A precision test of the isotropy of the speed of light using rotating cryogenic resonators, http://arxiv.org/abs/physics/0510169. Citado en la página 208.

171 H. A. Lorentz, De relative beweging van de aarde en dem aether, *Amst. Versl.* **1**, p. 74, 1892, y también H. A. Lorentz, Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light, *Amst. Proc.* **6**, p. 809, 1904, o *Amst. Versl.* **12**, p. 986, 1904. Citado en la página 211.

172 Una refutación general de tales propuestas se discute en S. R. Mainwaring & G. E. Stedman, Accelerated clock principles, *Physical Review A* **47**, pp. 3611–3619, 1993. Los experimentos con *muones* en el CERN en 1968 mostraron que las aceleraciones de hasta 10^{20} m/s^2 no tienen efecto, como se explica en D. H. Perkins, *Introduction to High Energy Physics*, Addison-Wesley, 1972, o en J. Bailey & al., *Il Nuovo Cimento* **9A**, p. 369, 1972. Citado en la página 212.

173 W. Rindler, General relativity before special relativity: an unconventional overview of relativity theory, *American Journal of Physics* **62**, pp. 887–893, 1994. Citado en la página 212.

174 Steven K. Blau, Would a topology change allow Ms. Bright to travel backward in time?, *American Journal of Physics* **66**, pp. 179–185, 1998. Citado en la página 215.

175 Sobre la formulación 'propia' de la relatividad, véase por ejemplo D. Hestenes, Proper particle mechanics, *Journal of Mathematical Physics* **15**, pp. 1768–1777, 1974. Citado en la página 215.

176 El sencillo experimento de montar un reloj muy preciso en un avión, dar una vuelta alrededor de la Tierra y compararlo con un reloj idéntico dejado en tierra se realizó por primera vez en J. C. Hafele & R. E. Keating, Around-the-world atomic clocks: predicted relativistic time gains, *Science* **177**, pp. 166–167, y Around-the-world atomic clocks: observed relativistic time gains, pp. 168–170, 14 July 1972. Véase también Ref. 160. Citado en la página 216.

177 Una introducción fácil de leer al cambio del tiempo con el observador, y a la relatividad general, es Roman U. Sexl & Herbert Kurt Schmidt, *Raum-Zeit-Relativität*, 2. Auflage, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991. Citado en la página 216.

178 El resultado más famoso es que los muones en movimiento permanecen más jóvenes, como se muestra por ejemplo en D. H. Frisch & J. B. Smith, Measurement of the relativistic time dilation using μ-mesons, *American Journal of Physics* **31**, pp. 342–355, 1963. Para un tratamiento pedagógico de la paradoja de los gemelos, véase E. Sheldon, Relativistic twins or sextuplets?, *European Journal of Physics* **24**, pp. 91–99, 2003. Citado en la página 216.

179 Paul J.Ñahin, *Time Machines – Time Travel in Physics, Metaphysics and Science Fiction*, Springer Verlag y AIP Press, segunda edición, 1999. Citado en la página 217.

180 El primer experimento con muones fue B. Rossi & D. B. Hall, Variation of the rate of decay of mesotrons with momentum, *Physical Review* **59**, pp. 223–228, 1941. 'Mesotron' es el antiguo nombre para el muon. Citado en la página 217.

181 A. Harvey & E. Schucking, A small puzzle from 1905, *Physics Today*, pp. 34–36, March 2005. Citado en la página 218.

182 W. Rindler, Length contraction paradox, *American Journal of Physics* **29**, pp. 365–366, 1961. Para una variante sin gravedad, véase R. Shaw, Length contraction paradox, *American Journal of Physics* **30**, p. 72, 1962. Citado en la página 219.

183 van Lintel & C. Gruber, The rod and hole paradox re-examined, *European Journal of Physics* **26**, pp. 19–23, 2005. Citado en la página 220.

184 Esta situación se discute en G. P. Sastry, Is length contraction paradoxical?, *American Journal of Physics* **55**, 1987, pp. 943–946. Este artículo también contiene una extensa lista de bibliografía que cubre variaciones de la paradoja de la contracción longitudinal. Citado en la página 220.

185 S. P. Boughn, The case of the identically accelerated twins, *American Journal of Physics* **57**, pp. 791–793, 1989. Citado en las páginas 220 and 224.

186 J. M. Supplee, Relativistic buoyancy, *American Journal of Physics 57* **1**, pp. 75–77, January 1989. Véase también G. E. A. Matsas, Relativistic Arquimedes law for fast moving bodies and the general-relativistic resolution of the 'submarine paradox', *Physical Review D* **68**, p. 027701, 2003, o http://arxiv.org/abs/gr-qc/0305106. Citado en la página 220.

187 La distinción se publicó por primera vez en J. Terrell, Invisibility of Lorentz contraction, *Physical Review* **116**, pp. 1041–1045, 1959, y R. Penrose, The apparent shape of a relativistically moving sphere, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **55**, pp. 137–139, 1959. Citado en la página 221.

188 G. R. Rybicki, Speed limit on walking, *American Journal of Physics* **59**, pp. 368–369, 1991. Citado en la página 225.

189 Los primeros ejemplos de tales observaciones astronómicas se encuentran en A.R. Whitney & al., Quasars revisited: rapid time variations observed via very-long-baseline interferometry, *Science* **173**, pp. 225–230, 1971, y en M.H. Cohen & al., The small-scale structure of radio galaxies and quasi-stellar sources at 3.8 centimetres, *Astrophysical Journal* **170**, pp. 207–217, 1971. Véase también T. J. Pearson, S.C. Unwin, M.H. Cohen, R. P. Linfield, A. C. S. Readhead, G. A. Seielstad, R. S. Simon & R. C. Walker, Superluminal expansion of quasar 3C 273, *Nature* **290**, pp. 365–368, 1981. Se da una panorámica en J. A. Zensus & T. J. Pearson, editores, *Superluminal radio sources*, Cambridge University Press, 1987. Otra medida, que utiliza interferometría de radioondas con línea de base muy larga, se muestra en la portada de *Nature*: I. F. Mirabel & L. F. Rodriguez, A superluminal source in the galaxy, *Nature* **371**, pp. 46–48, 1994. Se da un ejemplo más reciente en *Science News* **152**, p. 357, 6 December 1997.

Se encuentra una explicación pedagógica en D. C. Gabuzda, The use of quasars in teaching introductory special relativity, *American Journal of Physics* **55**, pp. 214–215, 1987, y en Edwin F. Taylor & John A. Wheeler, *Spacetime Physics – Introduction to Special Relativity*, second edition, Freeman, 1992, páginas 89-92. Este excelente libro ya fue mencionado en el texto. Citado en la página 227.

190 O. M. Bilaniuk & E. C. Sudarshan, Particles beyond the light barrier, *Physics Today* **22**, pp. 43–51, 1969, y O. M. P. Bilanuk, V. K. Deshpande & E. C. G. Sudarshan, 'Meta' relativity, *American Journal of Physics* **30**, pp. 718–723, 1962. Véase también E. Recami, editor, *Tachyons, Monopoles and Related Topics*, North-Holland, Amsterdam, 1978. Citado en la página 228.

191 J. P. Costella, B. H. J. McKellar, A. A. Rawlinson & G. J. Stephenson, The Thomas rotation, *American Journal of Physics* **69**, pp. 837–847, 2001. Citado en la página 228.

192 Véase por ejemplo S. S. Costa & G. E. A. Matsas, Temperature and relativity, *preprint* disponible en http://arxiv.org/abs/gr-qc/9505045. Citado en la página 229.

193 R. C. Tolman & G. N. Lewis, The principle of relativity and non-Newtonian mechanics, *Philosophical Magazine* **18**, pp. 510–523, 1909, y R. C. Tolman, Non-Newtonian mechanics: the mass of a moving body, *Philosophical Magazine* **23**, pp. 375–380, 1912. Citado en la página 230.

194 S. Rainville, J.K. Thompson, E.G. Myers, J.M. Brown, M.S. Dewey, E.G. Kessler, R.D. Deslattes, H.G. Börner, M. Jentschel, P. Mutti & D.E. Pritchard, World year of physics: a direct test of $E = mc^2$, *Nature* **438**, pp. 1096–1097, 2005. Citado en la página 234.

195 Esta información se debe a una comunicación privada de Frank DiFilippo; parte de la historia está en F. DiFilippo, V.Ñatarajan, K. R. Boyce & D. E. Pritchard, Accurate atomic masses for fundamental metrology, *Physical Review Letters* **73**, pp. 1481–1484, 1994. Estas medidas fueron realizadas con trampas de Penning; se da una revisión de las posibilidades que ofrecen en R. C. Thompson, Precision measurement aspects of ion traps, *Measurement Science and Technology* **1**, pp. 93–105, 1990. Los experimentos más importantes en el campo de la levitación de partículas individuales merecieron un Premio Nobel en 1989. Una de las charlas del Premio Nobel se puede encontrar en W. Paul, Electromagnetic traps for neutral and charged particles, *Reviews of Modern Physics* **62**, pp. 531–540, 1990. Citado en la página 234.

196 J. L. Synge, *Relativity: The Special Theory*, North-Holland, 1956, pp. 208–213. Se puede encontrar más sobre antipartículas en relatividad especial en J. P. Costella, B. H. J. McKellar & A. A. Rawlinson, Classical antiparticles, *American Journal of Physics* **65**, pp. 835–841, 1997. Véase también Ref. 211. Citado en la página 236.

197 A. Papapetrou, Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der relativistischen Mechanik, *Praktika Acad. Athenes* **14**, p. 540, 1939, y A. Papapetrou, Drehimpuls- und Schwerpunktsatz in der Diracschen Theorie, *Praktika Acad. Athenes* **15**, p. 404, 1940. Véase también M. H. L. Pryce, The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connexion with the quantum theory of elementary particles, *Proceedings of the Royal Society in London, A* **195**, pp. 62–81, 1948. Citado en la página 237.

198 Las referencias anteriores al $E = mc^2$ de Einstein son: Tolver Preston, *Physics of the Ether*, E. & F.N. Spon, 1875, J. H. Poincaré, La théorie de Lorentz et le principe de réaction, *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles* **5**, pp. 252–278, 1900, O. De Pretto, Ipotesi dell'etere nella vita dell'universo, *Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti* **tomo LXIII**, parte 2, pp. 439–500, Febbraio 1904, F. Hasenöhrl, *Berichte der Wiener Akademie* **113**, p. 1039, 1904, F. Hasenöhrl, Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern, *Annalen der Physik* **15**, pp. 344–370, 1904, F. Hasenöhrl, Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern – Berichtigung, *Annalen der Physik* **16**, pp. 589–592, 1905. Hasenöhrl murió en 1915, De Pretto en 1921. Todos estos artículos se publicaron antes del famoso artículo Albert Einstein, Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?, *Annalen der Physik* **18**, pp. 639–641, 1905. Citado en la página 239.

199 Una joya entre los libros de texto sobre relatividad especial es Ulrich E. Schröder, *Spezielle Relativitätstheorie*, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1981. Citado en las páginas 241 and 244.

200 Un artículo fácil de leer que muestra una fotocopia de una carta de Einstein en la que apunta esto es Lev B. Okun, The concept of mass, *Physics Today*, pp. 31–36, June 1989. El tema no está exento de controversia, como muestran las cartas de los lectores que siguen al artículo;

se encuentran en *Physics Today*, pp. 13–14 and pp. 115–117, May 1990. El tema continua siendo fuente de debate. Citado en la página 243.

201 CHRISTIAN MØLLER, *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, 1952, 1972. Este texto clásico ha sido traducido a varios idiomas. Citado en la página 244.

202 P. EHRENFEST, Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie, *Physikalische Zeitschrift* **10**, pp. 918–928, 1909. Ehrenfest (incorrectamente) sugirió que esto significaba que la relatividad no podía ser correcta. Un resumen moderno de este tema se encuentra en M. L. RUGGIERO, The relative space: space measurements on a rotating platform, http://arxiv.org/abs/gr-qc/0309020. Citado en la página 245.

203 R. J. LOW, When moving clocks run fast, *European Journal of Physics* **16**, pp. 228–229, 1995. Citado en la página 250.

204 G. STEPHENSON & C. W. KILMISTER, *Special Relativity for Physicists*, Longmans, London, 1965. Véase también W. N. MATTHEWS, Relativistic velocity and acceleration transformations from thought experiments, *American Journal of Physics* 73, pp. 45–51, 2005. Citado en la página 252.

205 La imposibilidad de definir sistemas de coordenadas rígidos para observadores que aceleran de forma no uniforme se discute en CHARLES MISNER, KIP THORNE & JOHN A. WHEELER, *Gravitation*, Freeman, p. 168, 1973. Citado en la página 253.

206 E. A. DESLOGE & R. J. PHILPOTT, Uniformly accelerated reference frames in special relativity, *American Journal of Physics* **55**, pp. 252–261, 1987. Citado en la página 253.

207 R. H. GOOD, Uniformly accelerated reference frame and twin paradox, *American Journal of Physics* **50**, pp. 232–238, 1982. Citado en las páginas 253, 254, and 258.

208 DWAYNE HAMILTON, The uniformly accelerated reference frame, *American Journal of Physics* **46**, pp. 83–89, 1978. Citado en la página 254.

209 La mejor (y más barata) colección de fórmulas matemática continúa siendo K. ROTTMANN, *Mathematische Formelsammlung*, BI Hochschultaschenbücher, 1960. Citado en la página 255.

210 C. G. ADLER & R. W. BREHME, Relativistic solutions to a falling body in a uniform gravitation field, *American Journal of Physics* **59**, pp. 209–213, 1991. Citado en la página 255.

211 Véase por ejemplo las excelentes notas de clase de D. J. RAYMOND, A radically modern approach to freshman physics, en la página web http://www.physics.nmt.edu/~raymond/teaching.html. Citado en las páginas 255 and 269.

212 L. MISHRA, The relativistic acceleration addition theorem, *Classical and Quantum Gravity* **11**, pp. L97–L102, 1994. Citado en la página 256.

213 EDWARD A. DESLOGE, The gravitational red-shift in a uniform field, *American Journal of Physics* **58**, pp. 856–858, 1990. Citado en la página 258.

214 Uno de los últimos de estos controvertidos experimentos es T. P. KRISHER, L. MALEKI, G. F. LUTES, L. E. PRIMAS, R. T. LOGAN, J. D. ANDERSON & C. M. WILL, Test of the isotropy of the one-way speed of light using hydrogen-maser frequency standards, *Physical Review D* **42**, pp. 731–734, 1990. Citado en la página 260.

215 EDWIN F. TAYLOR & A. P. FRENCH, Limitation on proper length in special relativity, *American Journal of Physics* **51**, pp. 889–893, 1983. Citado en la página 261.